ISSN 0970-7603

भारतीय शिक्षा शोध पत्रिका

Bharatiya Shiksha Shodh Patrika

वर्ष · १४ ● अक · १
जनवरी — जून १९९५
Vol 14 ● No. 1
Jan — June 1995

प्रकाशक

भारतीय शिक्षा शोध संस्थान

सरस्वती कुञ्ज, निरालानगर, लखनऊ

Indian Institute of Educational Research

Saraswati Kunj Nirala Nagar, Lucknow-226 020

भारतीय शिक्षा शोध पत्रिका

(अर्द्धवार्षिक शोध पत्रिका)

सम्पादक — डा० सीताराम जायसवाल [लखनऊ]

सह-सम्पादक — डा० गुज्जर मल्ल वर्मा [दिल्ली]

डा० शंकर शरण श्रीवास्तव [वाराणसी]

डा० वीरेन्द्र कुमार मित्तल [मेरठ]

शिक्षा एवं मनोविज्ञान सम्बन्धित भारतीय संस्कृति के संदर्भ में किये गये अध्ययनों को प्रकाशित करना भारतीय शिक्षा शोध पत्रिका का प्रमुख उद्देश्य है। पत्रिका मे हिन्दी अथवा अंग्रेजी भाषा में लेख प्रकाशित किये जाते है। हिन्दी लेखो का सार-संक्षेप अंग्रेजी मे और अंग्रेजी का हिन्दी में होना चाहिए।

लेख पृष्ठ के एक ओर, डबल स्पेसिंग में टाइप होना चाहिए। संदर्भ-सूची का विवरण लेख के अन्त मे लेखको के नाम के आधार पर वर्णमालानुसार दिया जाना चाहिए, जिसमे अन्तर्राष्ट्रीय प्रतीको का उपयोग करते हुए पत्रिका के शीर्षको को संक्षिप्त रूप से व्यक्त करना चाहिए। लेख में शब्दो की वांछित सीमा ३००० तक हों तो उत्तम रहेगा। यह अपेक्षा की जाती है कि इस पत्रिका मे प्रकाशन हेतु भेजा गया लेख अन्यत्र प्रकाशन के लिए नही भेजा जायेगा। लेख की दो प्रतियाँ भेजनी अनिवार्य है तथा उसके साथ लेख का सार-संक्षेप यथा सम्भव १०० से ५०० शब्दो मे, हिन्दी के लेख का अंग्रेजी मे तथा अंग्रेजी के लेख का हिन्दी मे दिया जाय।

प्रत्येक लेखक को उनके लेख की दस प्रतिलिपियाँ अभिनन्दन स्वरूप प्रेषित की जायेंगी। यदि लेखक अपने लेख की अतिरिक्त प्रतियाँ प्राप्त करना चाहते हो तो लेख भेजते समय इस सन्दर्भ मे लिख दें तथा अतिरिक्त प्रतियों का मूल्य ज्ञात कर अग्रिम भेजने का कष्ट करें।

पत्रिका मे शिक्षा एवं मनोविज्ञान विषयो पर प्रकाशित पुस्तको की समीक्षा भी प्रकाशित की जाती है। इस हेतु सम्पादक को पुस्तक की दो प्रतियाँ भेजने का कष्ट करे।

सदस्यता—

प्रति अंक	—	रु० ३०.०० मात्र	विदेशो में $	१०.००
वार्षिक	—	रु० ५०.०० मात्र	विदेशों मे $	१८.००
आजीवन	—	रु० ५००.०० मात्र	विदेशो में $	१५०.००
		४००.०० मात्र	(विद्याभारती से सम्बद्ध विद्यालयो के लिए)	

शुल्क राशि "भारतीय शिक्षा शोध पत्रिका" लखनऊ के नाम भेजी जाय।

पत्र व्यवहार—

भारतीय शिक्षा शोध संस्थान, सरस्वती कुंज, निरालानगर, लखनऊ—२२६ ०२०

गत अंक रु० ३०.०० प्रति अंक

सम्पर्क सूत्र (लेख, शुल्क व वितरण हेतु)

सम्पादक, भारतीय शिक्षा शोध पत्रिका, निरालानगर, लखनऊ-२२६ ०२०

पुनार मुद्रक, ११७ नजीराबाद, लखनऊ

वर्ष १४ : अंक १
Vol. 14 : No. 1

भारतीय शिक्षा शोध पत्रिका

(अर्धवार्षिक शोध पत्रिका)

जनवरी–जून १९९५

Bharatiya Shiksha Shodh Patrika

(A Bi-Annual Research Journal)

Jan.–June 1995

Published by

Indian Institute of Educational Research

(Affiliated to Vidya Bharati)

Saraswati Kunj, Nirala Nagar, Lucknow—226 020

भारतीय शिक्षा शोध पत्रिका

Bharatiya Shiksha Shodh Patrika

वर्ष . १४ अंक १ जनवरी—जून १९९५ Jan —June 1995 Vol · 14 No : 1

विषय-सूची CONTENTS

वर्ष १४ : अंक २
Vol. 14 : No. 2

भारतीय शिक्षा शोध पत्रिका

(अर्धवार्षिक शोध पत्रिका)

जुलाई–दिसम्बर १९९५

Bharatiya Shiksha Shodh Patrika

(A Bi-Annual Research Journal)

July–December 1995

Published by

Indian Institute of Educational Research

(Affiliated to Vidya Bharati)

Saraswati Kunj, Nirala Nagar, Lucknow—226 020

भारतीय शिक्षा शोध पत्रिका

Bharatiya Shiksha Shodh Patrika

वर्ष : १४ अंक : २ जुलाई—दिसम्बर १९९५ July—Dec. 1995 Vol 14 No : 2

विषय-सूची CONTENTS

संपादकीय

विनोबा और आध्यात्मिक शिक्षा

भारतीय संस्कृति मे "सादा जीवन और उच्च विचार" पर अत्यधिक बल दिया जाता है। आचार्य विनोबा भावे ने इस आदर्श का पालन जीवन-पर्यन्त किया। एक सामान्य पर कुलीन ब्राह्मण परिवार मे विनोबा का जन्म ग्यारह सितम्बर १८९५ मे हुआ था। इस वर्ष ११ सितम्बर १९९४ से सत विनोबा की जन्मशती मनाने का निर्णय लिया गया है। पूरे वर्ष भर अर्थात् ११ सितम्बर, ९४ से ११ सितम्बर, ९५ की अवधि मे आचार्य विनोबा के बहुआयामी व्यक्तित्व एव कृतित्व की चर्चा होगी और उनके द्वारा किये गये राष्ट्र-निर्माण के कार्यों से नई पीढी के लोगो को परिचित कराया जायेगा।

विनोबा गाधीजी के प्रिय अनुयायी थे। जब महात्मा गाधी ने व्यक्तिगत सत्याग्रह की योजना बनाई थी, तब इसके शुभारम्भ के लिए उन्होने विनोबा को चुना। इस कारण विनोबा अपने अज्ञातवास से निकल कर राष्ट्रीय मच पर उपस्थित हुए। गाधीजी की विचारधारा को अपनाते हुए और फिर अपने चिन्तन का भी उसमे समावेस करके आचार्य विनोवा भावे ने बुनियादी शिक्षा या नयी तालीम को निखारा। इस प्रकार आधुनिक भारतीय शिक्षा के आध्यात्मिक आयाम की ओर हम सबका ध्यान उन्होंने आकर्षित किया।

जीवन का लक्ष्य

इसमें सदेह नही, जीवन का परम लक्ष्य परमात्मा को पाना है। उस परमात्मा की पहिचान करना है जो आप मे और हममें, इतना ही नही जो कण-कण मे उपस्थित है, उसके प्रति समर्पित होना हे। परमपिता परमेश्वर की हम सतान है, इसे अपने कार्य और व्यवहार द्वारा सिद्ध करना हमारा पुनीत कर्तव्य है। विनोबा ने जीवन-पर्यन्त यही किया। एक स्थल पर उन्होंने कहा है कि जीवन की सार्थकता के लिए तीन बातो पर ध्यान देना होगा। पहला है उद्योग, दूसरा है भक्तिमार्ग और तीसरा है सीखना-सिखाना।

अब इस पर तनिक विस्तार से विचार करे। जब आचार्य विनोबा भावे उद्योग का उल्लेख करते है, तब उनका तात्पर्य ऐसे कार्य से है जो व्यक्ति और समाज के लिए उपयोगी हो एव जीवकोपार्जन में सहायक हो। विनोबा ने जीवन मे ईश्वर-भक्ति का होना आवश्यक माना है। इतना ही नही, जो भी कार्य हम करे, उसे भगवान का दिया हुआ कार्य माने तथा उसके फल अथवा परिणाम की चिंता न करे। अतिम बात सीखने और सिखाने की है। हमने जो कुछ सीखा है, उसे दूसरो को सिखाने के लिए सहर्ष तैयार रहे। साथ ही हमें जो नही आता और उसे हमे सीखना है तो नि.सकोच हमें सीख लेना चाहिए। ऐसा करते समय छोटे-बड़े का विचार नही करना चाहिए। अधिक आयु का व्यक्ति अपने से कम आयु वाले से सीखने के लिए तत्पर रहे। इन तीनो बातों के मूल मे व्यक्ति, समाज और मानवमात्र के प्रति मंगल कामना है।

अध्यात्म का आधार

आचार्य विनोबा भावे के प्रत्येक विचार में आध्यात्मिक गहराई होती है। दूसरे शब्दो मे, कोई भी कार्य हो, उसके अन्तर और बाह्य दोनो पक्षो पर समान ध्यान देने से हम आध्यात्मिक पक्ष की उनेक्षा नही कर सकते। एक बार आचार्य विनोबा भावे से पूछा गया कि अध्यात्म क्या हे ? उन्होंने कहा कि अध्यात्म की तीन अनिवार्य निष्ठाएँ है.—

"उनमे से पहली निष्ठा यह है कि हकमे निरपेक्ष नैतिक मूल्यो पर आस्था होनी चाहिए। कभी सच तो कभी झूठ—इस प्रकार की अवसरवादी मनोवृत्ति और दाम्भिक विचार नही चलेगा। मानव-जीवन के प्रति अध्यात्म का दृष्टिकोण ऐसा नही हो सकता। जीवन को कुछ बुनियादी सिद्धान्तो और मूल्यो पर आधारित होना चाहिए, जो अपरिवर्तनीय हो, निरपेक्ष हो। दूसरी निष्ठा यह है कि जीवमात्र की एकता और पवित्रता मे हमारा विश्वास होना चाहिए। जीवन की एकता और पवित्रता पर विश्वास होना बडी और कठिन बात है, लेकिन वह आवश्यक हैं। तीसरी बात है, मृत्यु के बाद भी जीवन की अखण्डता का स्वीकार। आत्मज्ञान मे ये तीनो बाते अनिवार्य है इनके अलावा और भी कई बाते जोडी जा सकती है, परन्तु इनमे से एक भी घटायी नहीं जा सकती।"[1]

इन्हीं तीन निष्ठाओ को और अधिक स्पष्ट करते हुए आचार्य विनोबा ने एक अन्य सदर्भ मे कहा है .—

"अध्यात्म मूलभूत श्रद्धा है। उसके जो कुछ अश ध्यान मे आते रहते है, वे यहाँ रखने की कोशिश कर रहा हूँ। एक श्रद्धा तो यह है कि पूरे जीवन के लिये निरपेक्ष नैतिक मूल्यो पर श्रद्धा (फेथ इन दी एँब्सोल्यूट वैल्यूज) की जरूरत है। इस प्रकार के शाश्वत नैतिक मूल्यो को मानने मे सब तरह से लाभ है, उसे तोडने मे सब प्रकार से हानि है। यह श्रद्धा इसलिए कही जायगी कि आज के युग मे और किसी भी काल मे मानव-मन को निरपेक्ष नीति कभी जँची नही। हिंसा कुछ स्थानों में अनिवार्य मानी गयी थी, यह तो एक मिसाल है। ऐसे ही जो दूसरे नैतिक मूल्य शाश्वत माने जायेगे, उनमे अपवाद निकालने की जरूरत मनुष्य को मालूम

हुई। और बुद्धि से यह सिद्ध करना अशक्य हुआ कि आप सत्य पर अडे रहिये और आपका गला रेता जा रहा है, फिर भी आप विजयी है। इसीलिए इसमे श्रद्धा रखने की बात आती है।"

"अध्यात्म-श्रद्धा का दूसरा विषय यह होगा कि मृत्यु के बाद भी जीवन है। मृत्यु से जीवन खण्डित नही होता। इसे जिस किसी रूप मे रहना हो, यह तफसील का विषय है, बुद्धि से उसका निर्णय नही होने वाला है। तफसील मे विचार-भेद हो सकता है। लेकिन जीवन-मृत्यु से खण्डित नही होता, उसके बाद भी रहता है—चाहे सूक्ष्म रूप मे रहे या स्थूल मे रहे, निराकार रूप मे रहे या साकार रूप मे, देहधारी रहे या देह-विहीन रूप मे—ये छह भेद हो सकते है और होगे—लेकिन जीवन अखण्ड है। जाहिर है कि यह विषय श्रद्धा का है। बुद्धि कुछ हद तक सबमे काम करेगी और फिर वह टूट जायगी। जहाँ वह टूट जायगी, वहाँ श्रद्धा काम करेगी। इस प्रकार जिस मनुष्य मे श्रद्धा नही है, उसे आगे का ग्रहण नही होगा। जहाँ तक बुद्धि की पहुँच है, वही तक ग्रहण होगा।"

"तीसरी श्रद्धा है प्राणिमात्र की एकता और पवित्रता—(यूनिटी एण्ड सेंक्टिटी ऑफ लाइफ) यह अंग्रेजी शब्द इसलिए कि आज अंग्रेजी की परिभाषा चलती है। शिक्षितो को समझने मे मदद मिलती है—यद्यपि मुझे सस्कृत शब्दो की आदत है। प्राणिमात्र की एकता और पवित्रता को जीवन मे लाना अशक्य है। यद्यपि जीवन के लिए हम जन्तुओ का सहार करते है; असख्य जन्तुओ का हमसे घात होता है और प्रत्यक्ष आचरण मे ऊँच-नीच का भेद माना जाता है। यह सब है, लेकिन यह श्रद्धा होनी चाहिए कि प्राणिमात्र एक है और पावन है।"[२]

आचार्य विनोबा भावे ने अध्यात्म और विज्ञान मे समन्वय पर बल दिया है। इस बात को ध्यान मे रखते हुए व्यक्ति के आतरिक और आध्यात्मिक विकास के लिए मूल्याधारित शिक्षा होनी चाहिए। इसके लिए तुलसीकृत रामायण बडी उपयोगी है। सत विनोबा के रामायण सम्बन्धी निम्नलिखित विचार आध्यात्मिक शिक्षा के संदर्भ मे अत्यन्त महत्त्वपूर्ण है—

"तुलसीदासजी की रामायण का सारे हिन्दुस्तान के साहित्यिक इतिहास में एक विशेष स्थान है। हिन्दी राष्ट्रभाषा है और यह उसका सर्वोत्तम ग्रन्थ है। अतः राष्ट्रीय दृष्टि से भी उसका स्थान अद्वितीय है ही। साथ-साथ वह हिन्दुस्तान के सात-आठ करोड़ लोगो के लिए वेद-तुल्य प्रमाण मान्य है, नित्य परिचित और धर्म-जागृति का एकमात्र आधार है। इस प्रकार धार्मिक दृष्टि से भी वह बेजोड कही जा सकती है। और रामभक्ति का प्रचार करने मे 'शिष्यात् इच्छेत पराजयम्' इस न्याय से वह अपने गुरु-वाल्मीकि रामायण को भी पराजय का आनन्द देने वाली है। इसलिए भक्ति-मार्गीय दृष्टि से भी यह ग्रन्थ अपनी सानी नही रखता। तीनों दृष्टियाँ एकत्र करके विचार करने पर अन्वयालकार का उदाहरण हो जाता है कि राम-रावण युद्ध जिस तरह राम-रावण के युद्ध जैसा था, उसी तरह तुलसीकृत रामायण तुलसीकृत रामायण जैसी ही है।"[३]

राष्ट्रीय शिक्षा-आध्यात्मिक शिक्षा

आचार्य विनोबा भावे ने परिबार मे आध्यात्मिक शिक्षा प्रदान करने पर बल दिया है।

दैनिक जीवन सम्बन्धी सभी कार्यो मे परिपूर्णता होना चाहिए। इस प्रकार बिनोबा जी के अनुसार जीवन की शिक्षा, जीवन के द्वारा और जीवन के लिए आध्यात्मिक आधार पर देना चाहिए। साथ ही उन्होंने यह भी कहा है कि राष्ट्रीय शिक्षा और आध्यात्मिक शिक्षा एक दूसरे के पूरक है। वही राष्ट्रीय शिक्षा उपयोगी होगी जिसका आधार आध्यात्मिक है। इस प्रकार विनोबा की आध्यात्मिक शिक्षा राष्ट्रीयता के साथ-साथ मानव-मात्र के कल्याण पर बल देती है। दूसरे शब्दो मे विनोबा सर्वोदय चाहते है।

सर्वोदय की सकल्पना

सर्वोदय के स्वरूप को स्पष्ट करते हुए विनोबा ने एक सूत्र का उल्लेख किया है जो इस प्रकार है —

राजनीति + विज्ञान = सर्वनाश
आध्यात्म + विज्ञान = सर्वोदय

अध्यात्म और विज्ञान मिलकर सर्वोदय सम्भव बनाते है। आधुनिक युग में राजनीति के साथ सत्ता संघर्ष भी जुड़ा है। इसलिए विनोबा कहते है कि आध्यात्मिक दृष्टि से विचार करके समस्याओ का समाधान करना हितकर है। सर्वोदय की बुनियाद भी इसी सत्य और तथ्य पर आधारित है। विनोबा का भूदान, ग्रामदान आदि सम्बन्धी कार्य सर्वोदय के ही अंग है और इसका आध्यात्मिक आयाम है। दूसरे शब्दो मे, सबके मगल की कामना, सबका सर्वांगीण विकास सर्वोदय की मूल भावना है और इसका आधार आध्यात्मिक है।

इस प्रकार हम देखते है कि सत विनोबा का जीवन और कार्य आध्यात्मिक शिक्षा का आधार है। भविष्य मे भारतीय शिक्षा का जितना अधिक आध्यात्मिक आधार होगा, उतनी ही सीमा तक यह यह भारतवासियों और मानवता के लिए एकत्व, विश्व-शान्ति और विश्वबंधुत्व का प्रसार करेगी।

अतः हम विनोबा का जन्मशती-वर्ष (११ सितम्बर १९९४ से ११ सितम्बर १९९५) को आध्यात्मिक शिक्षा का वर्ष मानकर पूरे उत्साह से कार्य करे।

सीताराम जायसवाल

सन्दर्भ

१. विनोबा, **आत्मज्ञान और विज्ञान,** सर्वसेवा सघ प्रकाशन, राजघाट, वाराणसी, १९८३, पृ० १२-१३

२. विनोबा, वही, पृ० ४५-४७

३. विनोबा, **जीवन और शिक्षण,** सस्ता साहित्य मंडल, नई दिल्ली, १९५४, पृ० ६३-६४

प्रमिला श्रीवास्तव

व्यक्तित्व, लिंग एवं शिक्षकों की कार्य-संलग्नता

किसी भी शैक्षणिक प्रक्रिया मे शिक्षक की महत्त्वपूर्ण भूमिका होती है। वह शिक्षण के लिये उपयुक्त वातावरण का निर्माण करता है, जिससे कि बालक अपनी प्रतिभा एव क्षमता का समुचित उपयोग कर सके।

कक्षा शिक्षण के लिए उपयुक्त वातावरण तभी निर्मित हो सकता है जबकि शिक्षक सक्रिय रूप से अपना योगदान दे अर्थात् जब शिक्षक अपने कार्य मे पूरी तरह सलग्न रहेगा तभी शिक्षण को प्रभावकारी एव उत्पादक बना सकेगा।

कार्य-सलग्नता की अवधारणा का महत्त्व आज अधिकाधिक स्वीकार किया जाने लगा है। लोधी एव केजनर (१९६५) ने कार्य सलग्नता के सबध मे अपने विचार व्यक्त करते हुए कहा है कि कार्य-सलग्नता वह स्थिति है जिसमे व्यक्ति अपने को मनोवैज्ञानिक रूप मे कार्य के साथ एकाकार कर लेता है।

रीता बाखरू (१९८७) ने शिक्षको की कार्य-सलग्नता और कक्षागत् व्यवहार का अध्ययन किया और पाया कि कार्य-सलग्नता का कक्षागत् व्यवहार पर सार्थक प्रभाव पडता है। प्रमिला श्रीवास्तव (१९९०) ने टाइप "ए" एव टाइप "बी" शिक्षको के कक्षागत व्यवहार का अध्ययन किया।

कार्य-सलग्नता को बहुत से कारक प्रभावित करते है जिसमे व्यक्तित्व एक महत्त्वपूण कारक है। चन्दा एव कर (१९८२) के जननाकिय चर के साथ कार्य-सलग्नता एव कार्य सन्तुष्टि के सह सबध का अध्ययन किया। डोक एव श्रीवास्तव (१९८८) ने आवश्यकता-सन्तुष्टि, कार्य-सलग्नता एव आंतरिक अभिप्रेरणा के प्रति कार्य अभिवृत्ति का अध्ययन किया और सार्थक अन्तर

प्रमिला श्रीवास्तव, शोध छात्रा, मनोविज्ञान, गु. घा. वि., बिलासपुर।

पाया। जेनकिन्स (१९७५) ने टाइप "ए" व्यक्तित्व को परिभाषित करते हुए कहा है कि टाइप "ए" व्यक्तित्व में उच्च कार्य सलग्नता पाई जाती है।

साहित्य का अवलोकन करने पर ऐसा कोई भी साहित्य प्रकाश मे नही आया जो टाइप "ए" एव टाइप "बी" व्यक्तित्व वाले शिक्षको की कार्य-सलग्नता की व्याख्या करता हो। अत. टाइप "ए" एव टाइप "बी" व्यक्तित्व वाले शिक्षकों मे कार्य-संलग्नता का अध्ययन करना ही वर्तमान शोध का मुख्य उद्देश्य है।

उद्देश्य

वर्तमान अध्ययन के मुख्य उद्देश्य निम्नलिखित है :—

१ कार्य-सलग्नता पर टाइप "ए" एव टाइप "बी" व्यक्तित्व के प्रभाव का अध्ययन करना।

२. कार्य-सलग्नता पर लिंग के प्रभाव का अध्ययन करना।

३. कार्य-सलग्नता पर व्यक्तित्व एवं लिग की अन्त क्रिया के प्रभाव का अध्ययन करना।

परिकल्पनाये

वर्तमान अध्ययन हेतु निम्नलिखित शून्य परिकल्पनाये निर्मित की गई है —

१. कार्य-सलग्नता पर व्यक्तित्व का कोई प्रभाव नही पडेगा।

२. कार्य-सलग्नता पर लिंग का कोई प्रभाव नही पडेगा।

३. कार्य-सलग्नता पर व्यक्तित्व एव लिग की अन्त क्रिया का कोई प्रभाव नही पडेगा।

कार्य-विधि

न्यादर्श

वर्तमान अध्ययन हेतु रायपुर नगर के विभिन्न उच्चतर माध्यमिक विद्यालयों से ६४ (३२ पुरुष एव ३२ महिला) शिक्षकों का चयन किया गया है। ये शिक्षक टाइप "ए" एवं टाइप "बी" मे वर्गीकृत है।

उपकरण

अध्ययन हेतु निम्नलिखित उपकरणो का उपयोग किया गया —

१. जे. ए. एस. (टाइप "ए" स्केल, १९७५)

२ कार्य-सलग्नता मापनी (लोधी एव केजनर, १९६५)

प्रक्रिया

सर्वप्रथम रायपुर नगर मे स्थित उच्चतर माध्यमिक विद्यालयो के शिक्षको के ऊपर टाइप ए स्केल प्रशासित कर टाइप ए एवं बी व्यक्तित्व वाले शिक्षको की पहचान की गई। तत्पश्चात् अध्ययन हेतु ६४ शिक्षको का चयन किया गया। चयनित शिक्षकों के ऊपर लोधी एव केजनर द्वारा विकसित कार्य-सलग्नता मापनी प्रशासित कर शिक्षको मे कार्य-सलग्नता का मापन किया गया।

प्रयुक्त साख्यिकी

प्रस्तुत शोध मे मुख्य प्रभाव एव अन्त क्रियात्मक प्रभाव को देखने के लिए प्रसरण-विश्लेषण विधि का उपयोग किया गया है।

परिणाम एव विश्लेषण

परिकल्पना की पुष्टि हेतु २ × २ कारकीय अभिकल्प का उपयोग किया गया है तथा प्रसरण-विश्लेषण तकनीक को प्रयुक्त किया गया है। प्राप्त परिणाम को तालिका १ व २ मे प्रदर्शित किया गया है जो निम्नानुसार है :—

तालिका १

समूहों के मध्यमान, प्रामाणिक विचलन, प्राप्तांको के योग तथा प्राप्ताको के वर्गो का योग

समूह	समूहो के मध्यमान	प्रमाणिक विचलन	प्राप्ताको के योग	प्राप्तांको के वर्गो का योग
टाइप "ए" पुरुष	७५.३१	८.६९	१२०५	९१८८५
टाइप "बी" पुरुष	६१.४३	५.८१	९८३	६०८९७
टाइप "ए" महिला	७३.९३	७.७७	११८३	८८३७५
टाइप "बी" महिला	५९.५६	५.८४	९५३	५७२७५

तालिका २

प्रसरण-विश्लेपण-साराश

प्रसरण के स्रोत	df	ss	ms	F
व्यक्तित्व	१	३१९२ २५	३१९२ २५	६२.६७**
लिंग	१	४२ २४	४२ २४	८२
अन्त क्रिया	१	९९	.९९	.०१
समूहो के अन्तर्गत त्रुटि	६०	३०५६.२६	५० ९३	

** .०१ विश्वाम स्तर पर सार्थक है।

तालिका—२, प्रदर्शित करती है कि व्यक्तित्व के लिए एक अनुपात ६२ ६७ है जो ०१ विश्वास स्तर के लिए सार्थक है। दूसरी ओर टी—मूल्य ७ ९१ ($\sqrt{\text{एफ}}$, गैरेट, १९७१) भी विश्वास-स्तर पर सार्थक है। इस प्रकार शून्य परिकल्पना (१) वर्तमान शोध मे अस्वीकृत की जाती है।

लिंग हेतु एफ—अनुपात का मान .८२ है जो .०५ पर सार्थक नही है। अत: शून्य परिकल्पना (२) स्वीकृत की जाती है। इसी प्रकार व्यक्तित्व एवं लिंग के बीच अन्त.क्रिया का प्रभाव भी सार्थक नही है। इस अन्त क्रिया के लिए एफ-अनुपात का मान ०१ है तो .०५ विश्वास स्तर पर सार्थक नही है। अत: शून्य परिकल्पना (३) सत्य सिद्ध होती है।

निष्कर्प

१. शिक्षक के व्यक्तित्व का उनकी कार्य-सलग्नता पर सार्थक प्रभाव पडता है।

२ शिक्षक की कार्य-सलग्नता पर लिंग का सार्थक प्रभाव नही पडता है।

३ शिक्षक की कार्य-सलग्नता पर व्यक्तित्व एव लिंग की अन्त·क्रिया का कोई सार्थक प्रभाव नही पडता है।

REFERENCES

Bakharu, R. (1987). *A Study of Job-Involvement and Class-room—Behaviour of Teachers*, M Ed Thesis, R S.U., Raipur.

Chadha, N.K. and Kaur, R. (1982). "Correlational study of Demographic Variables with Job-Involvement and Job-satisfaction in Public Sector Organization" *Perspectives in Psycho logical Researches.* Vol. 10(2) 11-18.

Dolke, A M. & Shrivastava, P K. (1988) "Need satisfaction, Job-Involvement and Intrinsic Motivation : A Factor Analytic study" *Indian Journal of Applied Psychology*, Vol 25(1), 13-17.

Garrett, H.E. (1971). *Statistics in Psychology and Education*, 6th (ed) Vakil Feffer and Simon Private Ltd.

Jenkins, C.P (1975) *The Coronary Prone Personality* in W P Gentry and H.B. Williams Jr (Ed.). *Psychological Aspects of Mycocardial Infraction and Coronary Care*, St. lous, Mosty.

Shrivastava, P. (1990). *A Study of Class-room Behaviour of Type-A and Type-B Personality Teachers*, M Phil Thesis, R S.U , Raipur.

ABSTRACT

Personality, Gender and Job-Involvement of Teachers

This study aims to find the effects of personality and gender on job-involvement of teachers. The sample consisted of 64 teachers from secondary schools of Raipur City. To identify Type-A and Type-B personality, JAS (Type-A Scale) was used To find out the job-involvement among teachers, Job-Involvement scale developed by Lodhal and Kejner 1965 was used The results indicate that Type-A and Type-B personality significantly affect the Job-Involvement among teachers whereas gender has no significant effect. Further it was found that the interactional effect of personality and gender is insignificant.

Pramila Shrivastava

अतिमानस

अतिमानस, दिव्य विज्ञान, कोई ऐसी चेतना नही जो हमारी वर्तमान चेतना के लिए पूर्णत विजातीय हो वह आत्मा का एक उत्कृष्टतर करण है और हमारी सामान्य चेतना की सभी क्रियाएँ अतिमानसिक क्रिया के ही सीमित और निम्नतर रूप है जो उसी से उद्भूत हुए है, क्योकि ये तो तात्कालिक प्रयोग और रचनाएँ है, और वह आत्मा की सच्ची एव पूर्ण, स्वय स्फूर्त एव समस्वर प्रकृति और क्रिया है, अतएव, जब हम मनसे अतिमानस की ओर उठते है तो चेतना की वह नयी शक्ति हमारी आत्मा और हमारे मन एव प्राण की क्रियाओ का परित्याग नही कर देती। बल्कि उन्हे ऊपर उठाती, विशाल बनाती और रूपान्तरित करती है। वह उन्हे उदात्त बनाती तथा उन्हे उनकी शक्ति और क्रिया का नित अधिकाधिक सच्चा स्वरूप प्रदान करती है। वह मन, चैत्य भागो और प्राण की स्थूल शक्तियो और क्रिया के रूपान्तर तक ही अपने को सीमित नही रखती, बल्कि वह हमारी प्रच्छन्न सत्ता की उन विशिष्ट दुर्लभतर शक्तियो और उस विशालतर बल एव ज्ञान को भी व्यक्त और रूपान्तरित करती है जो हमे आज गुह्य, अद्भूत रूप मे चैत्य तथा असामान्य वस्तुओ के समान प्रतीत होते है। अतिमानसिक प्रकृति मे ये वस्तुएँ जरा भी असामान्य नही रहती, बल्कि पूर्णतया स्वाभाविक एव सामान्य बन जाती है, पृथक रूप से चैत्य नही रहती बल्कि आध्यात्मिक बन जाती है। एक गुह्य और विचित्र क्रिया नही रहती, बल्कि एक सीधी, सरल, स्वाभाविक और स्वय स्फूर्त क्रिया बन जाती है। आत्मा जाग्रत भौतिक चेतना की भाति सीमित नही है और अतिमानस जब जाग्रत चेतना को अपने अधिकार मे ले आता है तो वह उसे अभौतिक बना देता है, सीमाओ से मुक्त कर देता है, पार्थिव तथा चैत्य भाग को आध्यात्मिक सत्ता की प्रकृति मे रूपान्तरित कर देता है।

–श्री अरविन्द

Kanta Kumari

POLITICAL ORIENTATION OF WOMEN STUDENTS

Political man is essentially a product of his social experience. His political role is not simply determined by the established political i e. constitutional and institutional frame. He has with him his family background, his occupation, his education, his religion, his sex, his friends and his class Each one of these factors affects his socialization in the society and in the course plays a role in political socialization of the individual. Thus, there are many factors in the social environment of an individual which affect his/her political orientations.

A study by Howell (1982) suggests that there exists some effect of gender role, particularly concerning the female role in political socialization On several occasions, there appeared to be an interaction between gender and the experimental treatment which suggested that there were possible differences in political orientations of boys and girls. It was found that boys were more politically aware and effectively participated in politics in comparison to girls. Females tend to have less of a sense of political efficacy than males

Campbell and associates (1952) reported the 32 per cent of the males in their sample felt very efficacious as compared to 20 per cent of the females. The study by Pattnaik (1982) also reveals that men are more likely than women to feel that they can cope with the complexities of politics and to believe that their participation carries some whight in the political process. Dowse and Hughes (1972) have reported that one of the best research

---

Dr (Mrs) Kanta Kumari, is Lecturer in the Department of Teacher Education, Kurukshetra University, Kurukshetra

findings in British politics is that women participate less and declare lower level of interest in politics than to men. Fewer women occupy significant political positions at all levels than men, and women are less likely to vote than men.

"Women have the mentality of minors in many fields and particularly in politics, they usually accept paternalism on the part of the men. The men—husband, financee, lover, father or brother is the indicator between them and the political world" (Almond and Verba, 1963). Election studies in India have clearly brought out low turn out among females. Among those who vote, there is high correspondence between the wives and their husband's choice. The usually go by the decision of the husband. The situation becomes worse in those cases where even the males do not have clearly defined political links (Gupta, 1975). Barnes (1900), Hall (1914), Goddard (1906), Hill (1930) and Vostrovsky (1899) have reported that boys are more likely than girls to pick historic and public figures for their ideals; and girls to pick parents, teachers and acquaintances out of the immediate environment It was found from the research of Wall (1948) that boys were more likely than girls to choose current war news, political features and leading articles as topics of discussion According to Fortune survey (1942), boys were found to be much better informed about politics than girls. Boys at every grade level show consistent superiority in political knowledge (Burton, 1936). Finding of Keppler (1984) demonstrates that women students were more supportive of funding organisations than men. According to Patric (1967), girls tend to be unquestioning and non-complaint towards political figures and laws They are more willing than boys to be political authorities as trustworthy, responsibls, benign and powerful-

Mukhopadhyay (1977) reveals that political participation is relatively high in case of male members of the society. Kourvetaris and Betty (1980) found that men tend to have higher political status than women but the relationship is quite weak (.12). Singh (1986) found in his study that boys were more politically socialized than girls. Cognitive, affective and evaluative orientations were high among boys as compared to girls. The women, on the whole, are more likely than men to abstain from voting. The phenomena is not unique to India. Cases of Britain, Germany, Austria, Norway, Sweden, Yugoslavia and the United States also illustrate that at every social level, women vote less than men. In India, due to differential decreases over time since 1977, female turnout narrows down but it never approximates the male turn out. So, it can be concluded that sex differences account for political orientation of students.

Keeping the above review of literature in view, the researcher conducted a study to find out political orientation of women senior secondary students. The main objectives of the study were—

(1) To find out differences between male and female students of +2 stage on political socialization viz., political knowledge, political interest, political participation, political values and political efficacy/cynicism;

(2) To find out differences between male and female students in their attitude towards political socialization.

THE SAMPLE

The sample of the study was chosen from a population of students studying in +1 and +2 classes in colleges and senior secondary schools located in Kurukshetra district of Haryana State. Because of its placement in historical and religious functionality, Kurukshetra has its own political and social values. The senior secondary students were selected for the present study because adolescent age is very crucial in the life of a student The students become mature, independent and confident enough to face the realities of life and society. Entrance to most of the professional courses, such as, engineering, medical sciences etc. has been opened to students of 17-18 years age group (+2 students). In many a democratic countries including India, the voting age has been reduced to 18 years

The sampling frame comprised of 901 students selected from six colleges and eight senior secondary schools of this district The sample was selected by stratified random sampling technique. The sample population was stratified into different categories on the basis of demographic, educational and family background of the students.

TOOLS USED

The following tools were used in the present study

1 Political Socialization Scale
2. Attitude Scale

These tools were constructed and standardized by the researcher.

Political socialization scale consisted of five sub-scales to measure—

(i) Political Knowledge
(ii) Political Interests

(iii) Political Participation

(iv) Political Values

(v) Political Efficacy/Cynicism

Each sub-scale consisted of 10 items which were selected on the basis of try-out and item analysis. Political knowledge sub-scale had multiple choice items with four distractors for each item. The items in the other sub-scales were to be responded as a five point scale viz., 1. Always, 2. Mostly, 3. Generally, 4. Occasionally, 5 Never. Test retest reliability of the whole scale was found to be 0 82, while intrinsic validity of the whole scale came out to be 0.90.

Attitude scale was constructed as 'Likert' method and after try-out consisted of 16 items, which were concerned with political orientation of students. The split-half reliability coefficient of the scale after using Spearman Brown Prophecy formula came to be 0 80. Besides establishing content and face validities of the scale, its intrinsic validity was calculated which was found to be 0.89

METHOD OF STUDY

Data were collected from 1000 students from +1 and +2 classes in colleges and senior secondary schools selected for the sample But 99 of them were excluded due to various reasons, such as, incomplete questionnaire(s), non-seriousness in responding to different items etc Thus, data from 901 students were utilized for analysis

Going for each scale was done according to the procedure prescribed for that scale. In political knowledge sub-scale of political socialization scale, each correct response was given one score, while wrong response was assigned a zero score. In the other four sub-scales, a score of 5 to 1 was assigned to different responses to each item of 'always'—5, 'mostly'—4 and so as to the last, 'never' which was given the weight of 1. Weighting was reversed. The total score of a student was the sum of his/her scores on all the items of different sub-scales

The attitude scale was developed on the technique of 'Likert Scale'. So, it was scored in a similar manner on a five point scale—5 to 1 for fevourable items and 1 to 5 for unfavourable/negative items starting from 'strongly agree' to 'strongly disagree'.

DATA ANALYSIS

The aim of this study was to find differences in political orientation between male and female senior secondary students So, t-test was used for analysing the data.

t-values between mean scores of political socialization and its five dimensions for male and female students belonging to urban and rural areas, and studying in +2 clases in schools and colleges have been shown in Tables I to VII

TABLE I

t-values Between Mean Scores of Political Socialization and its Five Dimensions for Male and Female Students

S No	Dimension	Male Students ($N_1=501$) Mean	SD	Female Students ($N_2=400$) Mean	SD	t-value
1.	Political Knowledge	7 57	1 73	7.53	1.63	0 29
2.	Political Interest	29 64	9.25	28.90	9.08	1 22
3.	Political Participation	22 79	9 11	18.33	6.77	8 39**
4	Political Values	38 49	8.11	39.72	6 57	2 50*
5.	Political Efficacy/Cynicism	28.21	6 12	30.12	6 97	4 32**
	Political Socialization	126.65	22.29	124 59	19.78	1.47

* Significant at 05 level. ** Significant at .01 level.

TABLE II

t-values Between Mean Scores of Political Socialization and its Five Dimensions for Male Urban and Female Urban Students

S No.	Dimension	Male Urban Students ($N_1=185$) Mean	SD	Female Urban Students ($N_2=255$) Mean	SD	t-value
1	Political Knowledge	8 03	1 59	7 51	1 72	3 25**
2	Political Interest	28.74	9 46	28 37	8 98	0 41
3	Political Participation	22 19	8 69	17 92	6.45	5 64**
4.	Political Values	40 09	8 47	39 57	6 46	0 70
5	Political Efficacy/Cynicism	28.00	5 64	29.74	7.04	2 88**
	Political Socialization	127 04	20.91	123.11	19.79	1 99*

* Significant at 05 level **Significant at .01 level.

TABLE III

t-values Between Mean Scores of Political Socialization and its Five Dimensions for Male Rural and Female Rural Students

S No	Dimension	Male Rural Students (N_1=316) Mean	SD	Female Rural Students (N_2=145) Mean	SD	t-value
1	Political Knowledge	7.29	1.75	7.57	1.46	1.78
2.	Political Interest	30.17	9.08	29.83	9.19	0.38
3.	Political Participation	23.06	9.32	19 04	7 29	5.04**
4	Political Values	37 56	7 74	39.98	6.76	3.41**
5.	Political Efficacy/Cynicism	28 33	6 37	30 79	6 79	3 67**
	Political Socialization	126 42	23 05	127.21	19.49	0 38

** Significant at 01 level.

TABLE IV

t-values Between Mean Scores of Political Socialization and its Five Dimensions for Female Urban and Female Rural Students

S.No.	Dimension	Female Urban Students (N_1=255) Mean	SD	Female Rural Students (N_2=145) Mean	SD	t-value
1.	Political Knowledge	7 51	1.72	7.57	1 46	0.39
2	Political Interest	28 37	8 98	29.83	9.18	1.54
3.	Political Participation	17.92	6.45	19.04	7.23	1.56
4	Political Values	39.57	6 46	39.98	6.76	0.59
5	Political Efficacy/Cynicism	29.74	7.04	30.79	6.79	1.40
	Political Socialization	123.11	19.79	127.21	19.49	2.04*

* Significant at .05 level.

TABLE V

t-values Between Mean Scores of Political Socialization and its Five Dimensions for Male College and Female College Students

S.No.	Dimension	Male College Students (N₁=195) Mean	SD	Female College Students (N₂=297) Mean	SD	t-value
1	Political Knowledge	7.13	1.93	7.55	1.70	2.49*
2.	Political Interest	30.41	10.32	30.30	8.77	0.20
3	Political Participation	22.58	8.45	18.49	6.43	5.73**
4.	Political Values	35.88	9.41	39.77	6.56	5.02**
5	Political Efficacy/Cynicism	28.24	6.35	30.86	6.79	4.35**
	Political Socialization	124.14	24.40	127.09	19.43	1.41

* Significant at .05 level. ** Significant at .01 level

TABLE VI

t-values Between Mean Scores of Political Socialization and its Five Dimensions for Male School and Female School Students

S.No.	Dimension	Male School Students (N₁=307) Mean	SD	Female School Students (N₂=103) Mean	SD	t-value
1	Political Knowledge	7.84	1.53	7.48	1.41	2.22*
2.	Political Interest	29.22	8.48	24.54	8.54	4.82**
3.	Political Participation	22.84	9.50	17.84	7.63	5.39**
4.	Political Values	40.14	6.66	39.55	6.60	0.78
5	Political Efficacy/Cynicism	28.19	5.96	27.97	7.02	0.27
	Political Socialization	128.23	20.68	117.39	19.00	4.89**

* Significant at .05 level ** Significant at .01 level.

TABLE VII

t-values Between Mean Scores of Political Socialization and its Five Dimensions for Female School and Female College Students

S No.	Dimension	Female College Students ($N_1=297$) Mean	SD	Female School Students ($N_2=103$) Mean	SD	t-value
1	Political Knowledge	7.55	1 69	7 48	1.41	0.45
2	Political Interest	30 30	8.77	24.54	8.54	5 06**
3	Political Participation	18 49	6.43	17 84	7 63	0.77
4.	Political Values	39 77	6 56	39 55	6.60	0.29
5.	Political Efficacy/Cynicism	30 86	6.79	27 97	7.02	3.64**
	Political Socialization	127 09	19.43	117.39	19 00	4.44**

** Significant at .01 level.

t-test was also applied to find differences between attitude of male and female students towards political socialization The results are shown in Table VIII.

TABLE – VIII

t-value between Mean Attitude Scores of Male and Female Students

S No.	Group	N	Mean	SD	t-value
1	Male Students	501	56 96	10.18	2.62**
2	Female Students	400	58 58	8.35	

** Significant at 01 level.

DISCUSSION OF RESULTS

In Table I, t-ratios for the dimensions of political participation, political values and political efficacy/cynicism are significant It indicates that male and female students differ significantly on different dimensions of political socialization.

The mean scores show that male students have higher political participation (M=22.79) as compared to female students (M=18 33). However, female students have higher regard for political values (M=39.72) and a better sense of political efficacy (M=30.12) than male Students.

This leads to the conclusion that sex factor adheres to the difference for three dimensions of political socialization, namely, political participation, political values, and political efficacy However, the sex factor has not shown significant t-ratio for the total scores of political socialization. These results are supported by the findings of Pattnaik (1982), Howell (1982) and Mukhopadhayay (1977), who have reported that men are more likely than women to feel that they can cope with the complexities of politics and to believe that their participation carries some weight in the political process. However, girls tend to be unquestioning and non-complaining towards political figures and authorities (Patric, 1967), thereby, having more respect for political values and political efficacy than male students.

Table II to IV show that when sex and residence are taken together, t-ratios between mean scores of various levels of sex and residence are significant for political socialization and its different dimensions (except for political interest) So, null hypothesis is rejected, which indicates that students belonging to different sex and residence differ significantly on political socialization.

The mean scores show that male-urban students have highest scores on political knowledge (M=8.03), and political values (M=40.09); male rural students have maximum political interest (M=30.17) and political participation (M=30.79). Female students (M=127.21) from rural areas have shown maximum value of political socialization closely followed by male students from urban areas (M=127.04) Female-urban students have the least political socialization.

A number of 'Mahila Mandals' and other orgnizations work in rural areas in this part of Haryana and they fight for the causes of females. Political awareness created by them explains the maximum political socialization of female rural students.

Table V to VII show that when sex of senior secondary students is seen with reference to the institution attended by them, t-ratios between mean scores of various levels of sex and institution are significant. So, null hypothesis is rejected, which indicates that male and female students in schools and colleges of Haryana differ significantly on political socialization and its various dimensions.

The mean scores show that male school students possess maximum political knowledge (M=7.84), have most political participation (M=22 84) and have highest regard for political values (M=40.14); male college students have maximum political interests (M=30.41); and female college students have highest sense of political efficacy (M=30.86). Further, male school students are most politically socialized (M=128.23) among all the four groups

It leads to the conclusion that sex-institution combination shows differences on political socialization of senior secondary students.

Table VIII shows that t-ratio between mean attitude scores of male and female students is significant at .01 level. So, null hypothesis is rejected, which indicates that male and female students differ significantly on their attitude towards political socialization.

The mean attitude scores show that female students (M=58.58) have significantly higher scores than male students (M=56.96). It means that female students have more favourable attitude towards political socialization than male students, leading to the conclusion that sex factor adheres to the differences on students' attitude towards political socialization.

However, the earlier results have indicated that sex difference did not exist at significant level on political socialization. These results do not deter with the present results because the females have been found to be having more respect for political values and a higher sense of political efficacy as compared to male students (Cf Table 1). These factors of political values and political efficacy comprise the frame of reference to express attitude towards political socialization. It can be explained with the observation of Patric (1967) that females are more willing than males to see political authorities as trustworthy, responsible, benign and powerful. Such type of fixations in the mind may be making their attitude favourable towards political socialization

CONCLUSION

Sex of the senior secondary students adhere to the differences on different dimensions of political socialization and attitude towards political socialization. So, female students have different political orientations as compared to their male counterparts.

Female urban students have been found to be more politically socialized than other groups. Female students also have more favourable attitude towards political socialization than male students.

REFERENCES

Almond, G.A and Verba, Sidney, *The Civic Culture*, Princeton University Press, Princeton, 1963, 1981.

Barnes, E., "Children's Ideals", *Ped. Sem.*, Vol. 7, 1900.

Burton, W.H., "Children's Civic Information, 1924-1935 (Southern California)", *Education Monograph* (7), University of Southern California Press, Los Angeles, 1936.

Campbell, Gurin and Miller, W.E., *The Voter Decides*, Evanston, ILL, 1954.

Fortune, *The Fortune Survey*, 26, 1042, 1942.

Goddard, H.H., "A Study of Children's Reading Tastes", *Ped. Sem.*, 6, 1906.

Gupta, Surendra K , *A Citizen in the Making*, National, Delhi, 1975.

Hill, D S., "Personification of Ideals by Urban Children", *Journal of Social Psychology*, Vol I, 1930

Howell, Martinez Vicky, "The Influence of Gender Role in Political Socialization : An Experimental Study of Maxican American Children", *Women and Politics*, Fall 82, 1982.

Keppler, Kurl Jay, "College Students Opinions on State and Campus Political Issues", *Dissertation Abstracts International*, Vol. 45, No 8 (February 1985).

Kourvetaris, George A. and Betty A Dobratz, *Political Sociology Readings in Research and Theory*, Transaction Books, New Brunswick, 1980.

Longton, Kenneth P., *Political Socialization*, Oxford University Press, London, 1981.

Mukhopadhyay, Amal Kumar, *Political Sociology : An Introductory Analysis*, K P. Bagchi and Company, Calcutta, 1977.

Patrick, John J., "Political Socialization of American Youth", *Research Bulletin (No 3)*, National Council for Social Studies, Washington, USA, 1967.

Pattnaik, Surendra Kumar, *Student Politics and Voting Behaviour*, Concept, New Delhi, 1982.

Singh, M., "Political Efficacy Among University Youth in Punjab", *Journal of Government and Political Studies*, Vol. VIII, Nos 1 and 2, 1986

Vostrovsky, C., "A Study of Children's Reading Tastes", *Ped. Sem.*, 6, 1899

Wall, W D., "The Newspaper Reading of Adolescents and Adults", *British Journal of Education*, Vol. 18, 1948

—o—

महिला विद्यार्थियों का राजनीतिक अनुकूलन

प्रस्तुत शोध पत्र का उद्देश्य—(i)+२ कक्षाओं के छात्र व छात्राओं के राजनीतिक समाजीकरण मे अन्तर ज्ञात करना, एव (ii) उनके राजनीतिक सम्बन्धी अभिवृत्ति मे अन्तर ज्ञात करना था, ताकि छात्राओं की राजनीतिक दिशा के बारे मे जाना जा सके।

इसके लिए ऐतिहासिक व धार्मिक प्रसिद्धि के कुरुक्षेत्र जिला (हरियाणा प्रान्त) मे ६ महाविद्यालयो व ८ वरिष्ठ माध्यमिक विद्यालयों की +२ कक्षाओं में पढने वाले ६०१ छात्र व छात्राएँ स्तरित यादृच्छिक प्रतिचयन विधि द्वारा चुने गये। इन छात्रों से शोध छात्रा द्वारा निर्मित —(i) राजनीतिक समाजीकरण स्केल, व (ii) अभिवृत्ति स्केल द्वारा दत्त सग्रहीत किये गये। राजनीतिक समाजीकरण स्केल के ५ आयाम है—राजनीतिक ज्ञान, राजनीतिक अभिरुचि, राजनीतिक सहभागिता, राजनीतिक मूल्य एवं राजनीतिक सामर्थ्य। दोषदर्षिता। इन पाँचो आयामो पर प्राप्त अक विद्यार्थी के राजनीतिक समाजीकरण को दर्शाता है।

राजनीतिक समाजीकरण व इसके पाँच आयामो एव अभिवृत्ति मापनी पर नगरीय व ग्रामीण छात्रों व छात्राओ द्वारा प्राप्त माध्याको पर---परीक्षण द्वारा विश्लेपण किया गया। मुख्य निष्कर्ष निम्नलिखित है :—

१—छात्रो द्वारा राजनीतिक सहभागिता छात्राओ की अपेक्षा अधिक है।

२—छात्राओ में राजनीतिक मूल्यों व राजनीतिक सामर्थ्य के प्रति आदर छात्रों से अधिक है।

३—छात्रों व छात्राओं के राजनीतिक समाजीकरण में कोई सार्थक अन्तर नही आया।

४—नगरीय व ग्रामीण क्षेत्रों के छात्रों व छात्राओं के राजनीतिक समाजीकरण और इसके विभिन्न आयामों मे (राजनीतिक अभिरुचि को छोड़कर) सार्थक अन्तर आया। नगरीय छात्रों ने राजनीतिक ज्ञान और राजनीतिक मूल्यों पर सर्वाधिक मध्याक प्राप्त किये, ग्रामीण छात्रों ने राजनीतिक सहभागिता व ग्रामीण छात्राओं ने राजनीतिक सामर्थ्य पर सर्वाधिक

मध्यांक प्राप्त किये, जबकि ग्रामीण छात्राओं में सर्वाधिक व नगरीय छात्राओं में सबसे कम राजनीतिक समाजीकरण पाया गया।

५—वरिष्ठ माध्यमिक विद्यालयों के छात्रों में सर्वाधिक राजनीतिक ज्ञान, राजनीतिक सहभागिता व राजनीतिक मूल्यों के प्रति आदर है, कालेज छात्रों में सर्वाधिक राजनीतिक अभिरुचि है, कालेज छात्राओं में सर्वाधिक राजनीतिक सामर्थ्य की भावना है, जबकि स्कूल छात्रों में सर्वाधिक राजनीतिक समाजीकरण पाया गया।

६—छात्राओं में राजनीतिक समाजीकरण के सम्बन्ध में अभिवृत्ति छात्रों की अपेक्षा अधिक अनुकूल है।

इस प्रकार प्रस्तुत शोध पत्र में दर्शाया गया है कि + २ कक्षाओं की छात्राओं व छात्रों के राजनीतिक समाजीकरण में सार्थक अन्तर है। छात्राओं में राजनीतिक समाजीकरण के प्रति अभिवृत्ति में अधिक अनुकूलता है। छात्राओं में ही, ग्रामीण क्षेत्र की छात्राओं में अन्य वर्गों की अपेक्षा अधिक राजनीतिक समाजीकरण है।

डा० कान्ताकुमारी

हिन्दी माध्यम की समस्या

विद्यार्थियों के माता-पिता तथा अभिभावकों के मन में यह तथ्य घर कर गया है कि हिन्दी माध्यम में शिक्षित युवकों का भविष्य अंधकारमय है, न उन्हें प्रतियोगी परीक्षाओं में, न चिकित्सा-अभियान्त्रिकी आदि के साक्षात्कारों में और न उद्योग-व्यापार में ही इससे कोई सहायता मिल पायेगी। इस महामारी के शिकार केवल साधारण जन ही नहीं बल्कि अपने को देश-प्रेमी, हिन्दी-प्रेमी, संस्कृति-प्रेमी, कहने वाले और राष्ट्रभक्ति का दावा करने वाले महापुरुष भी हैं। कोढ़ में खाज की तरह देवनागरी के शब्दों के साथ-साथ नागरी के अंक भी हमारे हाथ से नूरजहाँ के कबूतरों की तरह उड़-उड़ गये है। न जाने किस गफलत की घड़ी में हम नागरी अंकों के स्थान पर रोमन अंकों को स्वीकार कर बैठे, बिना यह जाने-बूझे कि इन अंकों की पालकी पर एक दिन अंग्रेजी महारानी घर-घर में प्रवेश कर जायगी और राष्ट्रभाषा के प्रेमी और प्रचारक अपने घर में ही बेगाने हो जायेंगे। आज भी कान्वेण्ट में पढ़ अधिकांश बच्चे हिन्दी के अंकों को पढ़ने में असमर्थ है, वे नागरी अंकों की १०० तक की गिनती न लिख सकते है, न पढ़ सकते है। रोमन अंकों की मान्यता से कम्प्यूटरीकरण में भी हिन्दी को काफी अड़चन उठानी पड़ सकती है। [डॉ० शिवमंगल सिंह "सुमन", सभापति हिन्दी साहित्य सम्मेलन, ४६ वाँ अधिवेशन मुंबई के भाषण से)

Language and Creativity

This is not at all to argue against the teaching of English as second or third language, which is increasing in the whole world. We are right in wanting our children to become competent in that language. The issue is the medium of education and the medium of creativity for which we must learn from the experience of developed countries. Could Japan, Taiwan, Thailand, etc, have become so dynamic if four percent of its population were trained to do their thinking in a foreign language ? How is it that Denmark, Finland and Israel, all with less population than the Santhals in India, are making so much more of a mark than the Santhals, indeed more than most States of India with 10 times their population ? It is because they are inherently creative and organised. Such creativity and organisation can only come up through the cultural system and in the language of the culture. In contrast, the poor Santhals are not able to go to a school which teaches in their own language ! Of course, the people of these small dynamic countries generally learn a couple of other languages, but the secret of their success lies in their ability to think creatively in accordance with the needs of their own cultural system so that the whole system, including the language, is built up.

—Clarence Maloney

(The **Hindu**, June 21, 1994)

डो० एल० शर्मा

जीवन-विज्ञान-प्रवेश-प्रशिक्षण : प्रभाव एवं प्रतिक्रियाएँ

वर्तमान में भारतीय समाज के जीवन मूल्य बदल रहे हैं। पूर्व मे निर्धारित चार जीवन-मूल्यो (धर्म, अर्थ, काम एव मोक्ष) मे से अब हमारे मूल्य अर्थ एवं काम ही रह गये लगते है। अर्थप्रधान इस युग मे सर्वेगुणा काचन माश्रयन्ते की उक्ति[1] यथार्थ प्रतीत होती है। अत अर्थ-प्राप्ति एव कामनाओ की पूर्ति में मनुष्य मूल प्रवृत्तियो का दास होता जा रहा है और पुन' वह मनुष्यत्व से पशुत्व की ओर बढ रहा है। आहार, निद्रा, भय, मैथुन आदि मूल प्रवृत्तियों[2] की पूर्ति मे मशगूल आज के मानव के व्यवहार मे धृति, क्षमा, दम, अस्तेय, शौच, इद्रिय-निग्रह आदि सार्वजनीन मानवीय गुण जो कि मानव-धर्म के लक्षण है[3] परिलक्षित नहीं हो रहे है। मानवीय मूल्यों से निर्देशित न होने के कारण मानवीय व्यवहार विकृत हो रहा है जिसका दुष्प्रभाव सुस्पष्ट रूप से सामाजिक सम्बन्धो एव सामाजिक संरचना पर पड रहा है। सामाजिक सकट की इस घडी में हमारा ध्यान इस प्रकार के प्रशिक्षण की ओर जाता है। जिससे व्यक्ति के व्यक्तित्व का संतुलित विकास हो सके। जीवन के बाह्य एव आतरिक दोनों पक्षों का सामजस्य हो सके।

डॉ० डी० एल० शर्मा, प्रोफेसर, बी० सी० टी० कालेज, गाधी विद्या मन्दिर, सरदार शहर।

१ यस्यास्ति वित स नर कुलीन
स पण्डित स श्रुतिमान गुणज्ञ'।
सा एव वक्ता स च दर्शनीय
सर्वेगुणा कांचन माश्रयन्ते ॥

२ आहार, निद्रा, भय, मैथुनंच्च सामान्य एतद् पशुभिनराणां—हितोपदेश

३. धृति, क्षमा, दमोअस्तेय शौचमिन्द्रिय निग्रह'
धी विद्या सत्यम् क्रोधो दशक धर्म लक्षणम्। मनुस्मृति ६/९२

आज की शिक्षा सैद्धान्तिक है। व्यवहार-परिष्कार, परिमार्जन हेतु उसमे कियाकलापो एव प्रयोगो का अभाव है। जीवन-विज्ञान-शिक्षा-क्रम के प्रेरक आचार्य श्री तुलसी की मान्यता है कि बालकों के मस्तिष्क को जानकारियो से भरने के साथ उनके अनुभव की क्षमता भी बढाई जाए और इसी दृष्टि से विकसित शिक्षा-उपक्रम जीवन विज्ञान है[४]।

जीवन के वाह्य पक्ष की सम्पूर्ति पदार्थ के द्वारा होती है तथा आतरिक पथ की सम्पूर्ति जैविक रसायनो, नाड़ीतत्वीय प्रकपनो, कर्म के स्पदनों और चेतना की निर्मलता द्वारा हो सकती है। वस्तुत जीवन-विज्ञान ही इस सब के समीकरण की प्रक्रिया है। यह प्रायोगिक प्रक्रिया है। व्यवहार के स्तर पर प्रयुक्त और परीक्षित है[५] अत जीवन विज्ञान का शिक्षण-प्रशिक्षण व्यक्तित्व के सतुलित विकास हेतु आवश्यक है।

जीवन-विज्ञान मूल्यपरक शिक्षा हेतु व्यावहारिक शिक्षा-क्रम है इसे ११ (ग्यारह) इकाइयों—ध्वनि, सकल्प, सम्यक व्यायाम, श्वास, कार्योत्सर्ग, ध्यान आदि मे बांटा गया है। इसके प्रशिक्षण का प्रतिफल शारीरिक, बौद्धिक, मानसिक एव भावात्मक विकास के रूप मे परिलक्षित होता है। प्राण-धारा का संतुलन, जैविक सतुलन, क्षमता की आस्था का जागरण एव परिष्कार—ये चार इसके तत्त्व है।[६]

प्रश्न यह समुपस्थित होता है कि इस शिक्षा क्रम का सचालन कौन करे। क्या शिक्षकों के इस शिक्षा-क्रम मे प्रशिक्षण के विना यह उपक्रम चल पाएगा। सुस्पष्ट उत्तर है 'नही'। अत पूर्वाश्यकता को ध्यान मे रखते हुए गांधी विद्या मन्दिर, सरदारशहर (राज०) मे इस प्रयोग का शुभारम्भ इस सस्थान के शिक्षक प्रशिक्षण महाविद्यालय के छात्राध्यापक-छात्राध्यापिकाओ के सप्त दिवसीय प्रवेश प्रशिक्षण के साथ करने का सुनिश्चय किया। फलत: १७-४-९३ से २३-४-९३ तक जीवन-विज्ञान प्रशिक्षण मे सिद्धहस्त मुनिश्री किशनलालजी के निर्देशन मे एक सप्त दिवसीय जीवन-विज्ञान-प्रवेश-प्रशिक्षण-शिविर का आयोजन गाधी विद्या मन्दिर के शिक्षक प्रशिक्षण महाविद्यालय में किया गया।

उक्त शिविर के आयोजन के प्रमुख लक्ष्य निम्नाकित थे —

(१) बी०एड०, एम०एड० के छात्राध्यपक व छात्राध्यापिकाओ को जीवन-विज्ञान-पाठ्यक्रम की जानकारी देना।

(२) छात्राध्यापक-छात्राध्यापिकाओं को जीवन-विज्ञान-पाठ्यक्रम मे समाविष्ट आसन, प्राणायाम, ध्यान, कार्योत्सर्ग आदि का अभ्यास कराना।

---

४ आचार्य श्री तुलसी आशीर्वचन जीवन-विज्ञान भाग ६-१० पृ० ५

५ युवाचार्य श्री महाप्रज्ञ पाथेय-जीवन-विजान भाग ६-१० पृ० ७

६ मुनि श्री किशनलाल एव सुराणा शुभकरण-जीवन-विज्ञान भाग ६-१० उपोदघात पृ० ४

(३) जीवन-विज्ञान के सप्त दिवसीय प्रवेश-प्रशिक्षण का छात्राध्यापक-छात्राध्यापिकाओ पर प्रभाव जानना ।

प्रस्तुत अध्ययन का न्यादर्श

प्रस्तुत अध्ययन का न्यादर्श मुख्यत उक्त प्रशिक्षण शिविर मे स्वेच्छया भाग लेने वाले बी० एड० व एम० एड० के छात्राध्यापक-छात्राध्यापिकाएँ है । न्यादर्श-चयन की दृष्टि से उक्त महाविद्यालय के छात्राध्यापक-छात्राध्यापिकाओ का, शिविर मे भाग लेने हेतु आह्वान किया गया । कुल ११५ ने अपना नाम दिया । इस तरह अध्ययन का न्यादर्श स्वेच्छया भाग लेने वाले ११५ छात्राध्यापक-छात्राध्यापिकाएँ है । जिनका विवरण इस प्रकार है––

सारणी संख्या १
लिंगानुसार न्यादर्श का वर्गीकरण

सख्या	छात्र-सख्या	प्रतिशत	छात्रा-सख्या	प्रतिशत
११५	८३	७२ १८	३२	२७ ८२

उपर्युक्त सारणी के अनुसार न्यादर्श का ७२ १८% छात्र तथा २७ ८२ % छात्राएँ थीं । महाविद्यालय मे छात्र-छात्राओं की कुल सख्या की दृष्टि से विचार करने पर लगभग ६६% छात्राओ ने शिविर मे भाग लिया जबकि भाग लेने वाले छात्रो की सख्या लगभग ४०% ही थी । निष्कर्षत छात्रो की तुलना मे छात्राओ का रुझान शिविर के प्रति अधिक रहा ।

सारणी सख्या २
आयु-वर्ग की दृष्टि से न्यादर्श का वर्गीकरण

आयु-वर्ग	छात्र	प्रतिशत	छात्राएँ	प्रतिशत	कुल छात्र-छात्राएँ
१८ से २१	१३	१५ ७६	१२	३७.५०	२५
२१ से २४	४६	५५ ५२	१७	५३ १२	६३
२५ से २७	२२	२६ ७०	०२	०६ २५	२४
२८ से ३०	०२	०२.०२	००	०.००	०२
३० से ऊपर	००	०.००	०१	३.१३	०१ (अध्यापक वर्ग)
योग प्रतिशत	८३	१०० %	३२	१०० %	११५

उपर्युक्त सारणी के विश्लेषण से यह तथ्य सामने आता है कि न्यादर्श मे २१ से २४ आयु-वर्ग के छात्र-छात्राएँ सर्वाधिक ६३ थे जो कि न्यादर्श का ५४ ७८% है। तथा २७ से ऊपर आयु-वर्ग की सख्या एक तीन थी जिनमें एक प्रवक्ता थी।

सारणी सख्या ३

न्यादर्श का शैक्षिक योग्यता की दृष्टि से वर्गीकरण

स्नातक (कलावर्ग)	छात्र	प्रतिशत	छात्राएँ	प्रतिशत	कुलयोग	प्रतिशत
स्नातक (कलावर्ग)	२४	२८ ९४	०९	२८ १२	३३	२८ ६९
स्नातक (विज्ञान वर्ग)	२०	२६ ५०	०४	१२.५०	२६	२२.६१
स्नातक (वाणि० वर्ग)	०६	०७ २३	००	०० ००	०६	०५ २२
स्नातोकोत्तर (कलावर्ग)	२६	३१ ३२	१८	५६ २५	४४	३८ २६
स्नातकोत्तर (वि० वर्ग)	०३	०३ ६१	००	०० ००	०३	०२.६१
स्नातकोत्तर (वा० वर्ग)	०२	०२ ४०	०१	०३ १३	०३	०२.६१
योग	८३	१००%	३२	१००%	११५	१००%

उपर्युक्त सारणी के विश्लेषण से स्पष्ट है कि स्नातकोत्तर (कला वर्ग) के छात्र-छात्राओं की संख्या सर्वाधिक ४४ है जो कि न्यादर्श का ३८.२६ है और सबसे कम २.६% विज्ञान एव वाणिज्य वर्ग के स्नातकोत्तर उपाधिधारी छात्र-छात्रा है। स्नातक वर्ग मे भी कला वर्ग के छात्राओं का प्रतिशत (२८ ६९%) अन्य सकायो के स्नातकों से अधिक था।

सारणी संख्या ४

राजस्थान के विभिन्न सम्भागो की दृष्टि से न्यादर्श का वर्गीकरण

नाम सख्या	छात्र सं०	प्रतिशत	छात्रा स०	कुल प्रतिशत	कुल छात्र-छात्राए
बीकानेर	३२	३८ ५६	१९	५९ ३८	५१
जयपुर	३४	४०.९५	०४	१२ ५०	३८
जोधपुर	०९	१०.८७	०७	२१.८६	१६
उदयपुर	०४	०४.८१	०१	०३.१३	०५
अजमेर	०४	०४.८१	०१	०३,१३	०५
योग प्रतिशत	८३	१००%	३२	१००%	११५

उपर्युक्त सारणी में प्रस्तुत दत्त के विश्लेषण से स्पष्ट है कि बीकानेर सम्भाग से छात्र-छात्राओ की संख्या सर्वाधिक ५१ है तथा दूसरा नम्बर जयपुर सम्भाग का है जिसके छात्र छात्राओ की सख्या ३८ है।

सारणी संख्या ५

आवास की दृष्टि से शहरी एवं ग्रामीण वर्ग में न्यादर्श का वर्गीकरण

	छात्र संख्या	प्रतिशत	छात्रा संख्या	प्रतिशत	योग
शहरी	३३	३९.७५	३२	१००	६५
ग्रामीण	५०	६०.२५	००	०००	५०
योग	८३	१००%	३२	१००%	११५

उपर्युक्त सारणी के दत्त विश्लेषण से स्पष्ट है कि छात्रों में ग्रामीण छात्रों की संख्या ५० थी जो कि कुल छात्रों की संख्या का ६०.२५% है। सभी छात्राएँ शहरी क्षेत्र की है कुल मिलाकर शहरी क्षेत्र के सम्भागियों की संख्या ग्रामीण क्षेत्र के सम्भागियों से अधिक है।

पूर्व प्रशिक्षित एवं अप्रशिक्षित की दृष्टि से केवल एक छात्रा ने पूर्व में प्रशिक्षण लिया है। शेष ११४ छात्र-छात्राएँ जीवन विज्ञान में अप्रशिक्षित थे।

नियमित तथा अनियमित रूप से आसन तथा प्राणायाम करने वाले छात्र-छात्राओं की दृष्टि से जब न्यादर्श को वर्गीकृत किया गया तो यह पाया गया कि सिर्फ १० छात्र-छात्राएँ ही नियमित रूप से आसन/व्यायामादि करते थे। शेष १०५ नहीं। व्यसनी/अव्यसनी छात्र-छात्राओं की दृष्टि से जब न्यादर्श को वर्गीकृत किया गया तो निष्कर्ष यह निकला कि न्यादर्श में सम्मिलित छात्र-छात्राओं में से १५ छात्र ऐसे थे जिन्हे किसी प्रकार का व्यसन नहीं था।

जीवन-विज्ञान प्रवेश प्रशिक्षण शिविर मे दिया गया सैद्धान्तिक ज्ञान एवं प्रायोगिक अभ्यास

इस शिविर का प्रारम्भ प्रात ६.०० बजे होता था और रात्रि ९.३० बजे तक चलता था। बीच में दो भोजनादि हेतु विश्राम थे। प्रात काल प्रारम्भ में १ घण्टे तक आसन एवं प्राणायाम का अभ्यास किया जाता था। मुनिश्री धर्मेन्द्रकुमार जी ने छात्रों का पेट श्वास की दस क्रियाओं, उत्तानपादासन, पवन मुक्तासन, भुजंगासन, शलभासन, मकरासन, शशांकासन, सर्वांगासन, मत्स्यासन, पश्चिमोत्तानासन, पद्मासन, सहज प्राणायाम, अनुलोम विलोम प्राणायाम तथा उज्जायी प्राणायाम का अभ्यास कराया। ११ छात्राओं को ऐसा ही अभ्यास श्रमणी योग क्षेत्र प्रज्ञा जी ने कराया। मुनिश्री किशनलालजी ने प्रेक्षाध्यान के अन्तर्गत श्वास-प्रेक्षा, दीर्घश्वास, समवृत्तिश्वास, शरीर प्रेक्षा, चैतन्य केन्द्र प्रेक्षा लेश्याध्यान, अनुप्रेक्षा का प्रशिक्षण दिया तथा कायोत्सर्गान्तर्गत शरीर शिथलीकरण, भेद-विज्ञान एवं अनुप्रेक्षा का अभ्यास कराया।

सैद्धान्तिक के अन्तर्गत शरीर विज्ञान, स्वास्थ्य विज्ञान तथा जीवन-विज्ञान पाठ्यक्रम, उसकी शिक्षण विधि पर व्याख्यान हुए इसके अतिरिक्त निम्नांकित प्रकरण पर मुनिश्री किशनलालजी एव युवाचार्य श्री महाप्रज्ञ के प्रवचन हुए -

– जीवन विज्ञान एव शिक्षा
– शिक्षा का राजनीतिकरण
– आवेगो सवेगो पर नियन्त्रण
– मस्तिष्क प्रशिक्षण एव स्मृति-विकास
– शिक्षा का प्रमुख उद्देश्य अ अन्तश्चेतना की जागृति
– स्वस्थ व्यक्तित्व निर्माण

दत्त सकलन हेतु प्रयुक्त उपकरण – दत्त सकलन हेतु निम्नांकित उपकरणों का प्रयोग किया गया–

(१) **साधना-शिविर प्रवेश-पत्र :**—इसमें १३ प्रश्न है, यह एक प्रकार की प्रश्नावली है जो कि शिविर प्रवेशार्थी के सम्बन्ध मे सूचना एकत्र करने का साधन है। इसे तुलसी अध्यात्म नीडम साधना-विभाग जैन विश्व भारती, लाडनू (राज०) द्वारा तैयार किया गया है। शिविर के प्रारम्भ होने से पूर्व यह प्रत्येक शिविरार्थी से भरवाया गया किन्तु इसके चिकित्सीय जाँच सम्बन्धी अ श सूक्ष्मता से नही भरे गए। चूँकि यह शिविर प्रवेश-शिविर मात्र था। अतः इस पर बहुत ध्यान नही दिया जा सका क्योंकि सप्त दिवसीय शिविर का वजन श्वासादि आदि पर उल्लेखनीय प्रभाव नही होगा– ऐसी प्राक्कल्पना रही।

(२) शिविर समाप्ति के बाद शारीरिक, मानसिक, बौद्धिक एव भावात्मक विकास की जाँच सम्बन्धी एक प्रश्नावली सभी शिविरार्थियों को दी गई। यह प्रश्नावली इसी शिविर हेतु तैयार की गई।

(३) शिविरार्थियों की सामान्य प्रतिक्रियाओ को जानने हेतु एक खाली कागज शीट भी प्रत्येक शिविरार्थियो को उनकी शिविर सम्बन्धी प्रतिक्रिया लिखने के लिए दी गई।

संकलित दत्त का विश्लेषण प्रस्तुत अध्ययन के लक्ष्यो को ध्यान मे रखकर किया गया चूँकि प्रस्तुत अध्ययन सर्वेक्षण आधारित एक सामान्य अध्ययन है। अत प्रतिशत के अलावा अन्य साख्यकीय युक्तियो का अनुपयोग उपयुक्त नही पाया गया।

दत्त विश्लेषण एव व्याख्या

प्रस्तुत शिविर का एक लक्ष्य बी० एड०/एम० एड० के छात्राध्यापक व छात्राध्यापिकाओ को जीवन-विज्ञान पाठ्यक्रम की जानकारी देना था।

छात्राध्यापक व छात्राध्यापिकाओ द्वारा दिये गये उत्तरों के अनुसार सभी छात्रा-

ध्यापक एवं छात्राध्यापिकाओं ने जीवन विज्ञान की विभिन्न इकाइयो का उल्लेख करते हुए यह भी बताया कि प्रत्येक इकाई की विषयवस्तु क्या है। उसकी शिक्षण विधि क्या है। ६०% छात्राध्यापक व छात्राध्यापिकाओ के उत्तर उपयुक्त हैं।

प्रशिक्षणार्थियों की अनुभूति यह रही कि जीवन-विज्ञान एक जीवनोपयोगी विषय है इसके शिक्षण प्रशिक्षण हेतु दक्ष प्रशिक्षक चाहिए। दक्ष प्रशिक्षक न होने की अवस्था में, यह पाठ्यक्रम उपयोगी होने के स्थान पर प्रतिकूल प्रभाव वाला भी हो सकता है। अत अधिकाधिक सख्या मे प्रशिक्षकों को दक्ष बनाना अत्यावश्यक है। प्रस्तुत शिविर का दूसरा लक्ष्य छात्राध्यापकों व छात्राध्यापिकाओं को जीवन-विज्ञान पाठ्यक्रम में समाविष्ट आसन, प्राणायाम, ध्यान, कायोत्सर्ग आदि का अभ्यास कराना था।

शिविर के अन्तिम दिनों मे किये गये निरीक्षात्मक मूल्याकन से यह सुनिश्चित हुआ कि ६०% छात्राध्यापक तथा ८५% छात्राध्यापिकाओं में बताए गये आसन, प्राणायाम, ध्यान, कायोत्सर्ग आदि को अच्छी तरह से करने की क्षमता का विकास हो गया है। प्रस्तुत शिविर का तीसरा लक्ष्य शिविर के छात्राध्यापक-छात्राध्यापिकाओ पर इस प्रवेश-प्रशिक्षण शिविर के प्रभाव का अध्ययन करना था।

इस प्रभाव को जाँचने के लिए उनकी शारीरिक स्थिति का मोटे रूप में पूर्व एव पर-परीक्षण किया गया तथा शिविर की समाप्ति पर उन्हें अपने प्रभावों को अंकित करने को कहा गया। उन प्रभावो एवं प्रतिक्रियाओ का विश्लेषण आगे प्रस्तुत किया जा रहा है। ११५ सम्भागियों में से ९६ की लिखित प्रतिक्रियाएँ प्राप्त हो सकी अत. ९६ का ही विश्लेषण यहाँ प्रस्तुत किया जा सकेगा। ये ९६ छात्राध्यापक-छात्राध्यापिकाओ ने पूर्णत. नियमित रूप से मनोयोग पूर्वक शिविर के सभी सत्रो मे भाग लिया अत उन पर पडे प्रभाव एव उनकी प्रतिक्रियाएँ मूल्यवान है।

शरीर पर पड़ने वाले प्रभाव

एक लक्ष्य सम्भागियो के शरीर पर पड़ने वाले प्रभावो का अध्ययन करना था। इस प्रभाव को कई दृष्टियो से देखा गया जिनका विवरण यहाँ प्रस्तुत है–

सारणी सख्या ६
शरीर-भार पर पड़ने वाले प्रभाव

सम्भागी	जिनका शरीर-भार घटा उनकी सख्या	जिनका शरीर-भार बढा उनकी संख्या	जिनका शरीर-भार स्थिर रहा उनकी सख्या	योग
छात्र	३८	१०	१५	६४
छात्राएँ	१६	०६	१०	३२
योग	५५	१६	२५	९६

उपर्युक्त सारणी मे प्रदर्शित दत्त से यह स्पष्ट होता है कि सर्वाधिक सख्या ५५ उन सम्भागियो की है जिनका भार घटा है यह सख्या, उन सम्भागियों की संख्या १६ से तिगुनी से अधिक है जिनका भार बढा है तथा जिनका भार स्थिर रहा उनसे दुगुनी से अधिक है। अत. यह तथ्य सामने आया कि शिविर की क्रियाएँ अनावश्यक शारीरिक भार को घटाती है और शरीर को सतुलित बनाती है चूकि यह प्रयोग सभी कारको को नियमित करके नही किया गया अत: शरीर भार घटना एक प्रवृत्ति (ट्रेंड) का द्योतक है। सूक्ष्म चिकित्सीय जाँच एवं अन्य कारकों को पूर्ण नियन्त्रित करके किया गया अध्ययन सही निष्कर्ष पर पहुँचने मे सहायक हो सकेगा।

सारणी सख्या ७
नाडी की गति पर प्रभाव

सम्भागी	जिनकी नाडी-गति घटी उनकी सख्या	जिनकी नाडी-गति बढी उनकी सख्या	जिनकी नाडी-गति पूर्ववत् रही उनकी सख्या	योग
छात्र	३८	१३	१३	६४
छात्राएँ	१५	०५	१२	३२
योग	५३	१८	२५	९६

उपर्युक्त सारणी में प्रदर्शित दत्त से यह सुस्पष्ट होता है कि शिविर की क्रियाओं के परिणाम स्वरूप ९६ मे से ५३ सम्भागियों की नाडी की गति घटी है अर्थात अधिक संख्या छात्र-छात्राएँ जिनका प्रतिशत ५५ २% है की नाडी की गति घटी है और नाड़ी की गति बढने वालो की सख्या १८ है और पूर्ववत रहने वालों की सख्या २५ है जो कि क्रमश: १८.७५ तथा २६ ०४%है ये दोनों मिलकर भी घटने वालों की संख्या से १० कम है। सारांश

यह है कि जीवन-विज्ञान शिविर के प्रायोगिक अभ्यास नाडी की गति को घटाकर सतुलित बनाने मे सहायक हो सकते है ।

सारणी सख्या ८
श्वास गति पर प्रभाव

सम्भागी	श्वास गति घटने वाले	श्वास गति बढने वाले	श्वास गति पूर्ववत वाले	योग
छात्र	४०	१०	१४	६४
छात्राएँ	१३	०६	१३	३२
योग	५३	१६	२७	९६

उपर्युक्त सारणी सख्या ८ मे प्रदर्शित दत्त के विश्लेपण से जिस प्रवृत्ति का संकेत मिलता है वह है कि शिविर के प्रायोगिको से श्वास गति घटकर संतुलित होती है क्योकि ५५ २% सम्भागियो की श्वास गति पर इस प्रकार का प्रभाव पाया गया है। सख्यात्मक दृष्टि से २७ सम्भागियो की श्वास गति पर कोई प्रभाव नही पडा, अर्थात उनकी श्वास गति पूर्ववत रही जबकि १६ सम्भागियो की श्वास बढ़ी पाई गई। श्वास गति का पूर्ववत रहना तो पूर्व में ही वाछनीय श्वास गति होने के कारण हो सकता है। किन्तु श्वास गति बढने के कारणो की जाच हेतु सूक्ष्म चिकित्सीय जाच की अपेक्षा होगी। साराश यह है कि कारण जो भी रहा हो स्पष्ट झुकाव श्वास गति घटने की ओर है।

सारणी संख्या ९
उत्सर्जन क्रिया पर प्रभाव

सम्भागी	उत्सर्जन क्रिया साफ	कब्ज	उत्सर्जन क्रिया पूर्ववत	योग
छात्र	५५	०४	०५	६४
छात्राएँ	१५	१३	०४	३२
योग	७०	१७	०९	९६

उपर्युक्त सारणी सख्या ९ मे प्रदर्शित दत्त के विश्लेपण से यह तथ्य स्पष्ट होता है कि शिविर के प्रायोगिको का सम्भागियो की उत्सर्जन क्रिया पर अच्छा प्रभाव पड़ा है क्योकि ९६ मे से ७० की उत्सर्जन क्रिया पर सकारात्मक प्रभाव है। इनका प्रतिशत ७२ ९१ है। जिन पर कोई प्रभाव नही हुआ उनका प्रतिशत १० से भी कम है।

छात्रो की तुलना मे छात्राओं पर यह प्रभाव कम हुआ यह अनुसधान का विषय है। शिविर मे आसन, व्यायामादि के प्रायोगिक प्रारम्भ होने के बाद छात्राओं की तरफ से यह बात प्रस्तुत की गई। हो सकता है छात्राओं की शारीरिक शक्ति सरचना आदि की तुलना मे यह कार्यक्रम उनके शरीर पर दुष्प्रभाव डालता हो किन्तु यह अनुमान मात्र है सही निष्कर्ष अनुसधान से ही प्राप्त किया जा सकता है।

सारणी सख्या १०
भूख की क्रिया पर प्रभाव

सम्भागी	भूख बढी	भूख घटी	भूख पूर्ववत रही	योग
छात्र	४७	०४	१३	६४
छात्राएँ	१८	१०	०४	३२
योग	६५	१४	१७	९६

उपर्युक्त सारणी सख्या १० मे प्रदर्शित दत्त को देखने पर एक बात यह सामने आती है कि भूख बढने वालों की संख्या सर्वाधिक ६५ है तथा भूख की स्थिति मे परिवर्तन न होने वालो की संख्या १७ है जो कि अच्छी संख्या है और भूख घटने वालो की सख्या १४ है। इस तरह तटस्थ एवं नकारात्मक प्रभाव वालो की संख्या ३१ हो जाती है। जो कि कुल का १/३ है। फिर भी तथ्यो से सुस्पष्ट है कि भूख की क्रिया पर भी शिविर का सकारात्मक प्रभाव है। चूंकि शिविर अत्यत अल्पकालीन था अत. बहुत प्रभाव की अपेक्षा की भी नही जानी चाहिए। भूख नामक इस शारीरिक क्रिया पर मन की स्थिति का भी प्रभाव पडता है और मानसिक स्थिति मे सुधार हेतु अधिक समय के शिविर की अपेक्षा है।

सारिणी संख्या ११
ज्ञानात्मक प्रभाव

सम्भागी	ज्ञानात्मक वृद्धि हुई व अनुकूल प्रभाव हुआ	ज्ञानात्मक वृद्धि नही हुई	योग
छात्र	५६	०८	६४
छात्राएँ	२८	०४	३२
योग	८४	१२	९६

उपर्युक्त सारणी सख्या ११ मे प्रदर्शित आकडो के अवलोकन से यह तथ्य मालूम होता है कि इस शिविर के आयोजन का सकारात्मक प्रभाव छात्र एव छात्राओ पर समान रूप मे हुआ है। ६४ मे से जहाँ ५६ छात्र यह स्वीकार करते है कि शिविर के आयोजन से उनके ज्ञान मे वृद्धि हुई है वहाँ ३२ मे से २८ छात्राएँ इस तथ्य को स्वीकारती है। यही स्थिति ज्ञानात्मक वृद्धि न होने के बारे मे है।

उक्त सारणी से एक तथ्य सामने आता है कि छात्र-छात्राओ की दृष्टि मे अन्य प्रभावो की अपेक्षा ज्ञानात्मक प्रभाव अपेक्षाकृत अधिक हुआ है क्योकि ९६ मे से ८४ छात्र-छात्राओं पर यह प्रभाव हुआ है ऐसा उन्होने स्वीकार किया है जो कि कुल सख्या का ८७ ५%है।

सारणी सख्या १२
आवेगों-सवेगों पर नियत्रण
(मानसिक एवं भावात्मक स्थिति पर प्रभाव)

सम्भागी	नियत्रण बढा	नियत्रण पूर्ववत रहा	नियत्रण घटा	योग
छात्र	४३	२०	०१	६४
छात्राएँ	३०	०२	००	३२
योग	७३	२२	०१	९६

उपर्युक्त सारिणी सख्या १२ मे प्रदर्शित आँकडे बहुत ही आह्लादकारी है। इतनी अल्पावधि के शिविर मे छात्र-छात्राओ के नियत्रण पर सकारात्मक प्रभाव हुआ है और यह प्रभाव ७६%से अधिक छात्र-छात्राओं पर पाया गया है। २२ छात्र-छात्राओं ने नियत्रण की स्थिति मे कोई परिवर्तन न होना स्वीकार किया है जबकि अपवाद के रूप मे एक छात्र ने नियंत्रण घटने की स्थिति की सूचना दी है। छात्रो की तुलना मे छात्राओं पर सकारात्मक प्रभाव अधिक हुआ क्योकि छात्राओ का प्रतिशत ९३ ७५ है जबकि छात्रो का ४४ ७९ ही है दोनो को मिलाकर यह प्रभाव ७६%छात्र-छात्राओ पर हुआ है।

सारणी संख्या १३
एकाग्रता पर प्रभाव

सम्भावी	एकाग्रता बढ़ी	एकाग्रता पूर्ववत रही	एकाग्रता कम हुई	योग
छात्र	५७	०६	०१	६४
छात्राएँ	३०	०२	००	३२
योग	८७	०८	०१	९६

प्रस्तुत शिविर का एकाग्रता पर प्रभाव उपर्युक्त सारणी सख्या १३ मे दर्शाया गया है। ६६ मे से ८७ छात्र-छात्राओ की प्रतिक्रिया यह है कि उनकी एकाग्रता मे वृद्धि हुई है। ६०.६२% छात्र-छात्राओं की यह प्रतिक्रिया कि उनकी एकाग्रता मे वृद्धि हुई है, शिविर की सफलता का द्योतक है। सिर्फ ८ छात्र-छात्राओ ने एकाग्रता की स्थिति मे कोई परिवर्तन प्रदर्शित नही किया है तथा एक छात्र ऐसा है जिसने एकाग्रता की स्थिति मे ह्रास बताया है।

छात्र-छात्राओ की तुलना की दृष्टि से विचार करने पर यह तथ्य सामने आता है कि छात्राओं के समूह की ३२ छात्राओ मे से ३० ने अर्थात् ६३.७५ ने एकाग्रता वृद्धि की सूचना दी है। जबकि ६४ छात्रो मे से ८६.०६% छात्रो ने एकाग्रता वृद्धि सबधी प्रतिक्रिया व्यक्त की है। इस तरह पुन छात्राओ की स्थिति बेहतर है।

सारणी संख्या १४

कार्य करने की रुचि पर प्रभाव

सम्भागी	रुचि बढी	रुचि पूर्ववत	रुचि घटी	कुल योग
छात्र	५३	४	७	६४
छात्राएँ	२६	३	३	३२
योग	७६	०७	१०	६६

उपर्युक्त सारणी सख्या १४ के अवलोकन से यह पता चलता है कि कार्य करने की रुचि जिनकी बढ़ी, उन सम्भागियो की सख्या ७६ है जो कि कुल का ८२.२६% है तथा जिनकी रुचि मे कोई परिवर्तन नही हुआ वे कुल सात है जो कि कुल का सिर्फ ७.२६% है। कार्य करने की रुचि घटने वालों की सख्या १० है जो कि कुल का १० ४१% है। ध्यान, योगाभ्यास आदि का कार्य करने की रुचि पर सकारात्मक प्रभाव पडता है, यह पूर्व मे हुए शोधों से मेल खाता तथ्य है किन्तु इनका नकारात्मक प्रभाव पडता है यह विचारणीय है, अनुसधनीय है।

सारणी संख्या १५
स्मरण-शक्ति पर प्रभाव

सम्भागी	स्मरण शक्ति बढी	स्मरण शक्ति पूर्ववत	स्मरण शक्ति घटी	योग
छात्र	४५	८	११	६४
छात्राएँ	२७	५	००	३२
योग	७२	१३	११	९६

ध्यान, योगाभ्यास आदि क्रियाओ का स्मरण शक्ति पर प्रभाव पडता है इस तथ्य को ध्यान मे रखकर यह जानने का प्रयास किया गया कि प्रस्तुत शिविर का सम्भागियो की स्मरण शक्ति पर क्या प्रभाव पडा ? उपर्युक्त सारणी सख्या १५ मे इस प्रभाव को दर्शाने वाले आंकडे दिए गये है । इन आकडो के अवलोकन से यह पता चलता है कि स्मरण शक्ति बढने वाले सम्भागियो की संख्या ७२ है जो कि कुल सम्भागियो का दो तिहाई अर्थात ७५% है । अल्पावधि मे यह सकारात्मक प्रभाव उल्लेखनीय है । जिनकी स्मरण-शक्ति पूर्ववत रही उनकी सख्या १३ है जो कि कुल का १३.५४ प्रतिशत है । स्मरण शक्ति पर कोई प्रभाव नही होता तो समझ मे आ सकता है किन्तु कुछ छात्रो ने (११) स्मरण शक्ति घटने का उल्लेख किया है जो कि पुन अनुसधान की अपेक्षा रखता है । साराशत कुल मिलाकर यह तथ्य सामने आया कि जीवन विज्ञान प्रशिक्षण का स्मरण शक्ति पर सकारात्मक प्रभाव पड़ता है । छात्रों की अपेक्षा छात्राओ पर सकारात्मक प्रभाव अधिक पडा ।

सारणी संख्या १६
दृष्टिकोण पर प्रभाव

सम्भागी	सकारात्मक प्रभाव	नकारात्मक प्रभाव	कोई परिवर्तन नही	योग
छात्र	५३	५	६	६४
छात्राएँ	२८	०	४	३२
योग	८१	५	१०	९६

विचार की दिशा, जिसमे दृष्टिकोण का निर्माण होता है, वह भी ध्यानादि क्रियाओं से प्रभावित होती है । इस तथ्य को ध्यान में रखकर यह जानने का प्रयास किया गया कि प्रस्तुत शिविर का छात्र-छात्राओ के दृष्टिकोण पर क्या प्रभाव पड़ा । उपर्युक्त सारणी संख्या १६ के अवलोकन से पता चलता है कि ९६ मे से ८१ छात्र-छात्राओ पर अर्थात ८४ ३७% छात्र-छात्राओ के दृष्टिकोण पर प्रस्तुत शिविर के क्रिया-कलापों का सकारात्मक प्रभाव

पड़ा। उनके दृष्टिकोण की दिशा सकारात्मक हुई। ९६ में से १० छात्र-छात्राओं ने सूचना दी कि उनके दृष्टिकोण पर शिविर की क्रियाओं का कोई प्रभाव नही पडा। ५ छात्रों ने नकारात्मक प्रभाव की सूचना दी जबकि एक भी छात्रा ने इस प्रकार के नकारात्मक प्रभाव की सूचना नही दी। यों भी सकारात्मक प्रभाव की दृष्टि से भी छात्राओं का प्रतिशत ८७ ५%छात्रों के प्रतिशत ८२.८१ से अधिक है।

साराशत शिविर के क्रिया कलापों का छात्र-छात्राओं के दृष्टिकोण पर सकारात्मक प्रभाव ही प्रमुख है। नकारात्मक प्रभाव ५% है जिसका अपने मे कोई सार्थकता नही है।

सारणी संख्या १७

भावनात्मक प्रभाव

सम्भागी	विधायी भावनाएँ	निषेधात्मक भावनाएँ	पूर्ववत स्थिति	योग
छात्र	४४	२	१८	६४
छात्राएँ	२०	०	१२	३२
योग	६४	०२	३०	९६

भावनाएँ मानव-व्यवहार को प्रभावित करती है। विधायी भाव मानव के व्यक्तित्व का सही दिशा मे विकास करते है जबकि निषेधात्मक भावों से व्यक्तित्व मे विकृति आती है। प्रस्तुत अध्ययन मे भावो के विधायी एव निषेधात्मक पक्षों की जाँच की गई। ९६ मे से ६४ छात्र-छात्राओ ने सूचना दी कि इस शिविर से उनकी भावनाओ को विधाई मोड मिला है। ये छात्र-छात्राओं के ६६.६६% का प्रतिनिधित्व करते है। नकारात्मक प्रभाव की रिपोर्ट करने वाली एक भी छात्रा नही है। केवल छात्र ही है और इनका प्रतिशत २.०८% है जो कि कोई सार्थक प्रतिशत नही है। यहाँ ३० छात्र-छात्राएँ (३१ २५%) ऐसे है जो कि इस शिविर का उनकी भावनाओ पर कोई प्रभाव नही पाते। यह काफी अच्छा प्रतिशत है तथा पूर्व मे वर्णित अन्य प्रभाओ से भिन्न झुकाव बताता है। अतः विचारणीय है। कुल मिलाकर देखे तो भावनाओं पर भी विधायी प्रभाव ही अधिक हुआ है। अत कहा जा सकता है कि शिविर के क्रिया-कलापों का भावनाओं पर प्रभाव की प्रमुख दिशा विधायी है।

छात्र-छात्राओ को अपनी प्रतिक्रियाओं को अकित करने के लिए खाली कागज भी दिए थे। इन खाली कागजो पर प्राय अधिकतम सम्भागियो द्वारा अकित महत्त्वपूर्ण प्रतिक्रियाएँ निम्नाकित है–

१ शिविर से प्रातः जल्दी उठने की आशा का विकास हुआ और प्रात जल्दी उठने की महत्ता का ज्ञान भी हुआ।

२ शिविर के निर्देशक एव प्रभारी द्वारा अपनाई गई समय की पाबदी ने समयबद्धता के प्रति जागरूकता की भावना का विकास किया है तथा इसकी महत्ता की अनुभूति भी कराई है ।

३. यौगिक क्रियाओं का शारीरिक एव मानसिक विकास पर उल्लेखनीय प्रभाव पडता है, इसका प्रत्यक्ष अनुभव हुआ है ।

४. प्रेक्षा-ध्यान के निम्नाकित प्रभाव परिलक्षित एव अनुभूति हुए –

१ आवेगो-सवेगो पर नियत्रण की क्षमता-विकास
२ चित्त की एकाग्रता
३. दृढ़ इच्छा-शक्ति विकास
४. आत्म-विश्वास में वृद्धि
५ शारीरिक-क्रियाओ मे सुधार
६ व्यवहार का सयम

५. कार्योत्सर्ग के माध्यम से मानसिक तनावो मे मुक्ति की आवश्यकता एव मानसिक तनावों से मुक्ति की अनुभूति हुई है ।

६. जीवन-विज्ञान-पाठ्यक्रम के सदर्भ मे हुए व्याख्यानों मे जीवन-विज्ञान की जानकारी के साथ-साथ, जीवन एव शिक्षा मे इसके महत्त्व का सज्ञान हुआ हैं ।

७ व्यसनी छात्रो को व्यसन छोडने का सकल्प लेने का अवसर मिला है ।

८ शिविर का कार्यक्रम प्रात काल से रात्रि तक चलने के कारण थकाने वाला एव उबा देने वाला रहा । शिविर की दैनिक समय कम होना चाहिए था ।

९ जीवन-विज्ञान की प्रकृति के अनुसार इसके शिक्षण एवं प्रशिक्षण हेतु पर्याप्त सख्या मे अनुभवी प्रशिक्षक होने चाहिए अन्यथा इसका प्रतिकूल प्रभाव भी पड सकता है ।

निष्कर्ष.–

१. प्रस्तुत अध्ययन का एक लक्ष्य बी एड. व एम एड के छात्राध्यापक एव छात्राध्यापिकाओ को जीवन-विज्ञान-पाठ्यक्रम की जानकारी देना था ।

सारणी सख्या ११ मे प्रदर्शित दत्त के विश्लेषण से स्पष्ट हुआ कि ८७ ५% छात्र-छात्राओ की जीवन-विज्ञान संबधी ज्ञान मे वृद्धि हुई । इसकी पुष्टि छात्र-छात्राओ ने लिखित मे दी । प्रतिक्रियाओ मे भी दी है कि न केवल जीवन-विज्ञान सबधी जानकारी हुई अपितु शिक्षा एवं जीवन मे इसके महत्त्व एव उपादेयता का भी ज्ञान हुआ है ।

— निष्कर्ष यह है कि प्रस्तुत शिविर से छात्र-छात्राओ को जावन-विज्ञान-पाठ्यक्रम सबधी जानकारी एवं उसकी जीवन एव शिक्षा-क्षेत्र में उपादेयता का ज्ञान हुआ है ।

२. प्रस्तुत अध्ययन का दूसरा लक्ष्य छात्राध्यापक व छात्राध्यापिकाओ को जीवन-विज्ञान पाठ्यक्रम मे समाविष्ट आसन, प्राणायाम, ध्यान कार्योत्सर्ग आदि का अभ्यास कराना था ।

छात्राध्यापक-छात्राध्यापिकाओ को उपर्युक्त आसन, प्राणायाम, ध्यान, कार्योत्सर्ग आदि का नित्य अभ्यास कराया गया । छात्र-छात्राओ ने उक्त आसनादि को किया, उनके प्रभाव का उल्लेख प्रतिक्रियाओ मे दिया है, यह इसका प्रमाण है । शिविर के अतिम दो दिवसो मे यह सूक्ष्म निरीक्षण कर देखा गया कि कितने छात्र-छात्राओं मे निर्दिष्ट आसनादि को कर सकने की क्षमता का विकास हुआ है । निष्कर्ष यह निकला कि ९०% छात्राध्यापक तथा ८५% छात्राध्यापिकाओ मे वताये गये आसनादि को कर सकने मे सक्षम थे । इससे यह पुष्ट होता है कि आसनादि के अभ्यास कराने के लक्ष्य की पूर्ति हुई ।

३ प्रस्तुत अध्ययन का तीसरा लक्ष्य जीवन-विज्ञान के सप्त दिवसीय प्रवेश-प्रशिक्षण का छात्राध्यापक एव छात्राध्यापिकाओ पर प्रभाव जानना था । इस संबध मे प्राप्त निष्कर्ष इस प्रकार है ।

शरीर पर प्रभाव

(क) शारीरिक-भार पर प्रभाव—शारीरिक-भार पर प्रभाव की दृष्टि से निष्कर्ष यह निकला कि शिविर के क्रिया-कलापो का प्रभाव शारीरिक भार घटने की ओर इंगित करता है क्योकि ९६ मे से ५५ अर्थात ५७ २९% शिविर प्रशिक्षणार्थियों के शरीर भार मे कमी हुई यह सकारात्मक प्रभाव के रूप मे अकित किया गया । देखिए सारणी संख्या—६ ।

(ख) नाडी-गति पर प्रभाव—नाडी-गति को सतुलित करने में भी शिविर के क्रिया-कलाप सफल रहे— ऐसा सारणी सख्या ७ मे दर्शाया गया है कि अधिक सख्या मे छात्र-छात्राओं की नाडी की तीव्र गति घटी है ।

(ग) श्वास-गति पर प्रभाव —छात्र-छात्राओं की श्वास-गति अधिक थी शिविर मे भाग लेने से उनकी श्वास-गति घटी है यह निष्कर्ष हमें मिला सारणी सख्या ८ में दिये गए दत्त से जो कि यह दर्शाता है कि ५५ २% सम्भागियों की श्वास गति पर शिविर के क्रियाकलापो का अनुकूल प्रभाव हुआ है ।

(घ) उत्सर्जन-क्रिया पर प्रभाव —उपर्युक्त तीन शारीरिक प्रभावों की अपेक्षा उत्सर्जन

क्रिया पर प्रभाव अधिक हुआ । यह सुस्पष्ट है सारणी संख्या ९ के दत्त-विश्लेषण से जो कि यह बताता है कि ७२.९१% छात्र-छात्राओं की उत्सर्जन-क्रिया मे सुधार हुआ । निष्कर्ष यह है कि शिविर के क्रिया-कलाप उत्सर्जन क्रिया को ठीक करने मे प्रभावी है ।

(ङ) भूख की क्रिया पर प्रभाव – भूख की क्रिया पर भी शिविर के क्रिया-कलापों का अनुकूल प्रभाव हुआ । देखिए सारिणी सख्या १० जो कि ९६ मे से ६५ अर्थात् ६७.८०% छात्र-छात्राओं की भूख की स्थिति मे सुधार प्रदर्शित करती है ।

(१) उपर्युक्त सभी का निष्कर्ष यह है कि शिविर के क्रिया-कलापों का शारीरिक विकास पर अनुकूल प्रभाव हुआ है ।

(२) ज्ञानात्मक प्रभाव – शिविर का ज्ञानात्मक प्रभाव सारणी सख्या ११ से बहुत सुस्पष्ट है कि ९६ मे से ८४ अर्थात् ८७.५% छात्र-छात्राओं के ज्ञान मे शिविर के परिणामस्वरूप वृद्धि हुई है ।

(३) मानसिक एव भावात्मक प्रभाव – शिविर के क्रिया-कलापों का मानसिक एव भावात्मक दृष्टि से भी सकारात्मक प्रभाव हुआ है संक्षेप मे इन प्रभावों को निष्कर्ष रूप मे इस तरह प्रस्तुत किया जा सकता है ।

(क) ९६ मे ७३ छात्र-छात्राओं अर्थात् ७६.०४% का आवेग-सवेगों पर नियत्रण की क्षमता बढी है । देखिए सारणी संख्या–१२ ।

(ख) एकाग्रता पर प्रभाव –इससे सुस्पष्ट होता है कि ९०.६२% छात्र-छात्राओं की चित्त की एकाग्रता की स्थिति का विकास हुआ है । देखिए सारणी स १३ ।

(ग) कार्य करने की रुचि –पर भी सकारात्मक प्रभाव हुआ है क्योंकि ८२.२९% छात्र-छात्राओं की कार्य करने की रुचि बढी है देखिए सारिणी सख्या १४ ।

(घ) ७५% छात्र-छात्राओं की स्मरण शक्ति के विकास के लक्षण शिविर के स्मरण-शक्ति पर प्रभाव को दर्शाते हैं । देखिए सारिणी सख्या १५ ।

(ङ) शिविर के परिणामस्वरूप छात्र-छात्राओं का दृष्टिकोण सकारात्मक हुआ है । अधिसख्या अर्थात् ८४.३७% का निषेधात्मक सोच कम हुआ है । यह शिविर का सुप्रभाव है । देखिए सारणी सख्या १६ ।

(च) भावनात्मक सुधार–शिविर के परिणाम स्वरूप छात्र-छात्राओं की भावनाएँ विधायी हुई है । इनकी निषेधात्मकता कम हुई है । यह सुस्पष्ट होता है सारणी सख्या १७ से जो यह बतायी है कि ६६.६६% छात्राओं की भावनाओं का परिष्कार हुआ है ।

सामान्य निष्कर्ष

(१) शिविर के परिणामस्वरूप छात्र-छात्राओं के शारीरिक विकास पर सकारात्मक प्रभाव हुआ है।

(२) शिविर के द्वारा छात्र-छात्राओं के मानसिक एवं भावनात्मक विकास दर को सही दिशा मिली है।

(३) शारीरिक विकास की अपेक्षा मानसिक व भावनात्मक विकास पर प्रभाव ज्यादा हुआ है।

(४) छात्रों पर जहाँ शारीरिक विकास की दृष्टि से ज्यादा प्रभाव है वहाँ छात्राओं का मानसिक एवं भावनात्मक पक्ष, छात्रों की अपेक्षा ज्यादा सुदृढ हुआ है।

(५) ज्ञानात्मक प्रभाव छात्र - छात्राओं पर सामान रूप से हुआ है।

सुझाव

(१) प्रस्तुत शिविर अति अल्पकालीन शिविर था। अत. इसे प्रवेश-शिविर नाम दिया गया। इतने अल्पकालीन शिविर का शरीरिक मानसिक, भावनात्मक एव ज्ञानात्मक प्रभाव अत्यल्प ही होगा। अत दीर्घकालीन शिविर लगा कर प्रभावो का अध्ययन करना चाहिए।

(२) प्रभावो के अध्ययन की दृष्टि से पूर्व परीक्षण एव पर परीक्षण बडी सूक्ष्मता से किया जाना आवश्यक है। प्रस्तुत अध्ययन मे ऐसा नही किया जा सकता। अत प्राप्त परिणाम व्यक्त की कई प्रतिक्रियाओ के पर ज्यादा आश्रित है बजाय सूक्ष्म पूर्व पर परीक्षण के। अत भविष्य मे सूक्ष्म पूर्व एव पर परिणामो के आधार पर अध्ययन किया जाना चाहिए।

(३) प्रस्तुत अध्ययन में अन्य उन कारकों को नियंत्रित नही किया गया जिनका शरीर, मन एव भावनाओ पर प्रभाव पड सकता है। इन्हे नियंत्रित किये बिना यह कहना तर्क सगत नही हो सकता कि जो प्रभाव (सकारात्मक एव नकारात्मक) हुए है वे शिविर के क्रियाकलापो के परिणाम स्वरूप ही हुए हैं। प्रायोगिक अध्ययनों मे प्रभाव जानने की दृष्टि से नियत्रण की महत्ता है। अच्छा तो यह हो सभी दृष्टि से समरूप बनाये गये दो समूहों का अध्ययन किया जाए। इनमे से एक को शिविर के क्रिया-कलाप दिए जाएँ दूसरे को नही तथा दोनो की पूर्व एव पर परीक्षण कर तुलना की जाय।

(४) प्रस्तुत अध्ययन के कुछ निष्कर्ष ऐसे है जो विशेषत छात्र-वर्ग पर नकारात्मक

प्रभाव की ओर सकेत करते है जबकि इस प्रकार के प्रभाव की कोई भी सम्भावना नही लगती । इसका एक कारण यह हो सकता है कि नकारात्मक प्रभाव रिपोर्ट करने वाले छात्र शिविर के सभी सत्रो मे नियमित नही रहे हो । अत भविष्य के अध्ययनो मे सभी सत्रों मे समयबद्ध नियमितता की व्यवस्था की जानी आवश्यक होगी ।

(५) विकासात्मक अध्ययनो से ही जीवन-विज्ञान-पाठ्यक्रम के प्रभाव को सही रूप मे जाना जा सकता है । अत लम्बी अवधि तक जीवन-विज्ञान-पाठ्यक्रम को अभ्यास कराने के बाद प्रभावों का अध्ययन युक्तियुक्त होगा । अल्पावधि के अध्ययनो मे शारीरिक व अन्य प्रभावो को अकित किया जाना सम्भव नहीं है क्योंकि ये विकास कुछेक महीनो मे नही बल्कि इनमे से कुछेक को तो वर्षो लग जाते है ।

निष्कर्षत यह कहा जा सकता है कि अपनी समस्त सीमाओ के बावजूद प्रस्तुत शिविर का प्रभाव छात्र-छात्राओं पर शिविर की अवधि के अनुरूप अच्छा परिलक्षित हुआ है । अत यह कहना तर्क युक्तियुक्त ही होगा कि जीवन-विज्ञान-पाठ्यक्रम-प्रशिक्षण का छात्र-छात्राओ के शरीर, मन, भावनाओ एव बुद्धि पर सकारात्मक प्रभाव पडता है ।

SUMMARY

Jeevan Vigyan is a curriculum for value based education This practical curriculum is divided into eleven units. It is said that this curriculum affects physical, mental and emotional aspects of human personality Keeping in view this assumption this curriculum was given to 115 students of B.Ed class. The study aimed at imparting knowledge and training of the curriculum to B.Ed students and studied its effect on different aspects of students' personality.

Analysis of data collected showed that more than 87% students were benefited as far as cognitive aspect was concerned. After training more than 80% students were able to perform Asanas and Pranayam, they learnt during the camp. Effects on physical development is positive 55% to 72% students found it useful as far as physical development was concerned From cognitive point of view more than 87% students felt benefited. The percentage showing effect on different mental and emotional aspects ranges from 66% to 98%. Thus this study indicates that Jeevan Vigyan curriculum has positive effect on different aspects of B.Ed. students personality. It may be concluded from this study that this curriculum is helpful in the development of human personality.

D. L. Sharma

स्वास्थ्य सम्बन्धी लोकोक्ति

भारत का प्राचीन औषधि विज्ञान अपने उच्च शिखर पर रहा होगा। कारण स्वास्थ्य सम्बन्धी उक्तियाँ जन-जन के कंठ पर रहती थी। जिस तरह आज सिनेमा के गाने, आप आम आदमी से सुन सकते है, उसी तरह हमारे ऋषियो महर्षियो ने अपनी प्रयोगशालाओं से प्राप्त अनुभवो को जनता मे फैला दिया था। समाज की भोजन सम्बन्धी दिनचर्या और रोगो का इलाज कविता रूप मे प्रचलित होने का अर्थ यही है कि लोग अपने अच्छे स्वास्थ्य के प्रति जागरूक रहे होगे। आइये हम भी अपनी प्राचीन सांस्कृतिक गरिमा का अवलोकन करे।

जा को मारा चाहिए बिन लाठी बिन घाव,
ताको यही बताइये, घुइयाँ पूड़ी खाव।

कितनी गहन बात इस दोहे मे कही गई है। घुइयाँ अरुई वर्षा-काल में होती है और वर्षा-काल में अग्नि पाचन मन्द रहती है। पूड़ी भी गरिष्ठ होती है। अत वर्षा-काल मे दोनो के सेवन से पाचन खराब होगा और पाचन बिगडने से अतिसार, आँव, रक्त दोष, गठिया जैसे रोग अपने आप पैदा हो जाते है। जब मनुष्य गरिष्ठ भोजन करेगा बीमार होगा और बार-बार यही प्रक्रिया दोहराई जायेगी तो वह मर ही जायेगा। नही तो मरे समान रहेगा।

गायत्री मंत्र

स्वामी विवेकानंद के अनुसार गायत्री सद्बुद्धि का मंत्र है। श्री अरविंद का कथन है कि गायत्री मे ऐसी शक्ति निहित है जिसके द्वारा महत्वपूर्ण कार्य किया जा सकता है। गुरुदेव रवीन्द्र नाथ ठाकुर कहते है, "भारतवर्ष को जगाने वाला जो मंत्र है वह इतना सरल है कि एक ही सांस में उसका उच्चारण किया जा सकता है। वह है—गायत्री मंत्र।

प्राचीन काल मे गायत्री की महिमा का सभी ऋषियो मुनियो और तपस्वियो ने वर्णन किया है और इसी गायत्री मंत्र का कितना अधिक महत्व आधुनिक काल मे है, इसका उल्लेख स्वामी विवेकानंद, श्री अरविंद, रवीन्द्र ठाकुर आदि ने किया है। ऐसे अद्भुत और शक्ति-दायनी मंत्र के जप का अनुष्ठान करने का मुझे सौभाग्य प्राप्त हुआ। अनुष्ठान काल मे जो, कठिनाइयाँ आईं और किस प्रकार उनका निराकरण गायत्री माता ने किया, इसका वर्णन मैंने करने का प्रयास किया है।

—आचार्य श्रीराम शर्मा

Namita Sahoo &
D. R. Goel

COUNTRYWIDE CLASSROOM WITH AND WITHOUT TALK-BACK

INTRODUCTION

There has been a tremendous expansion in the communication infrastructure in the country The expansion of T V network has been phenomenal with the launching of INSAT IB in 1983. The University Grants Commission in 1931 started an educational telecast for undergraduate students called the CONTRYWIDE CLASSROOM. The aim of this programme is to maintain the quality and standard in our universities and colleges

In India several efforts have been made to popularise educational television (ETV) programmes at school and college levels. At higher education stage Audio-visual Research Centre (AVRC) and Educational Media Research Centres (EMRCs) have been set-up in Indian universities to prepare ETV programmes for college/university students. At present there are four EMRCs/MCRC and ten AVRCs functioning in some universities/institutions of our country The ETV has been used as a supplementary medium of classroom instruction for university and college teaching programmes This study intends to cover the ETV programmes in the areas of Social Sciences

The paper presents Rationale of the study, Related studies, Statement of the problem, Objectives, Hypothesis, Sample, Tools, Research design, Procedure of data collection, Statistical analysis, Findings and implications

NAMITA SAHOO & Dr. D R GOEL, School of Education, Centre of Excellence, Devi Ahilya Vishwavidyalaya, Indore--452 001, India.

RATIONALE OF THE STUDY

There are studies by Doneriya(1988), Jaiswal(1988), Yadav (1988), James (1988) and UGC (1989) But in all the above studies T V has been studied as a communication in one way This limitation can be overcome where the viewers can get chance to interact with the subject experts on T V. presentation. The basic question is that while viewing the ETV programmes the learners may have a numerous queries on the matter presented through ETV With a view to make this effort successful the post telecast interactions are to be strengthened through talkback activities Studies are to be conducted to know that what type of above purpose, and whether talkback activities can make the ETC programmes significantly effective Here is an attempt to study the effectiveness of talkback programmes involving the interaction between the viewers and the subject experts during post telecast sessions

With the above background the investigator conducted the present study which might be useful for planning, coordination and development activities on countrywide classroom project in specific and ETV programmes in general

STATEMENT OF THE PROBLEM

The title of the problem was "A Study of the U G C. Counrywide Classroom. ETV programmes in terms of their contents, presentation, and Effectiveness with and without talkback."

OBJECTIVES

The objectives of the problem were .

(1) To analyse the countrywide classroom ETV programmes in terms of their contents.

(2) To analyse the countrywide classroom higher education ETV programmes in terms of presentation

(3) To study the effectiveness of countrywide classroom higher education ETV programmes in terms of achievement of students.

(4) To Compare the countrywide classroom ETV programmes with and without talkback,

(5) To compare the achievement of Hindi and English medium students on the UGC countrywide classroom ETV programmes

(6) To compare the effectiveness of the Indian and imported programmes in terms of performance of the students

(7) To analyse the reaction of students towards the UGC countrywide classroom programmes.

HYPOTHESES

The following null hypotheses were framed in relation to the objectives of the study

(1) There is no significant difference in the pre test and post test scores of students on the UGC countrywide classroom programmes

(2) There is no significant difference in the gain of the English medium students and Hindi medium students on the UGC countrywide classroom programmes

(3) There is no significant difference in the gain of the students on the Indian and imported UGC countrywide classroom programmes.

(4) The adjusted mean achievement score of the talkback group and that of the group without talkback do not differ significantly when pretest is taken as covariate

SAMPLE

Out of the countrywide classroom ETV programmes telecast from September 1990 to January 1991, 10 programmes on social science were recorded. The purposive sampling technique was employed for selecting the student sample 40 students of graduation level course of Social Science group belonging to School of Education, Devi Ahilya Vishwavidylaya, Indore, admitted during 1990-91 academic session constituted the sample for the study

TOOLS

The following tools were used for this study objective wise.

MONITORING TOOL —An educational monitoring tool developed by Goel (1985) having 16 close ended items was used for the analysis of contents and presentation of the study.

+TESTS On each ETV programme the investigator constructed an achievement test with objective type questions,

REACTION SCALE —A reaction scale developed by Jaiswal (1988) was used to measure the reactions of the viewers on the ETV programmes having 28 items, both close and open ended.

RESEARCH DESIGN

The pretest, treatment, post-test, talkback, and post talkback test design was used for conducting the study. The independent variable of the study was contrywide classroom programmes and talkback. The dependent variable was achievement of students.

PROCEDURE FOR DATA COLLECTION

The ten recorded programmes were viewed by the investigator one by one and analysed in terms of contents and presentation through the monitoring tool. An achievement test was used as pretest After this the whole group viewed the recorded Social Science programme one by one Then the investigator divided the whole group into two equal sub-groups For one sub-groups the same achievement test was used as post-test After it the other sub-group of students was told to ask question related to programmes and then the answers were given by the investigator. After the students viewing all the programmes the reaction scale was administered

STATISTICAL ANALYSIS

The data were analysed objectivewise with the help of 't' test, correlated 't', covariance, and Chisquare.

* For the analysis of contents, presentation and reactions of the viewer the Chisquare test was used
* For the analysis of pretest and post test mean scores and for the analysis of Indian and Foreign programmes the 't' test was used
* For the analysis of English and Hindi medium mean scores the correlated 't' test was used
* For the analysis of with and without talkback mean scores the analysis of covariance was used.

FINDINGS

(1) Contents and Presentation of CVCR Programmes :

— The sound and visuals were clear in most of the programmes, the colour

choice was appropriate There was optimum coordination between the sound and the visuals. The visual representation was well sequenced.

- The number of teaching points when seen against the time of the programme were adequate
- The speed of presentation was quite suitable.
- The individual teaching points were discussed adequately.
- Language was student level, the level of the programme in relation to the grade was suitable.
- A large number of programmes were at understanding level.
- In some of the programmes there was indoor shooting whereas in the other it was indoor as well as outdoor.
- The background music and audio-visual ratio in most of the programmes could be improved

As a whole all the programmes were quite well designed and produced.

2. Gain Through CWCR Programmes

In '8' programmes out of '10' there was significant gain, whereas, in the '2' programmes there was no significant gain because the programmes were just solo talk, there were absolutely no visuals and the speed of delivery was relatively fast

3. Mediumwise Effectiveness

In '8' programmes out of '10' there was no significant difference between the mean scores of Hindi and English medium students, whereas in '2' programmes there was significant difference in the mean scores of English and Hindi medium students in favour of English medium students

4. Originwise Effectiveness

There was no significant difference between the mean achievement on Native and Imported programmes. It means the programmes were equally effective irrespective of their origin.

5. Effectiveness of CWCR With and Without Talkback

The gain in '3' programmes out of '10' was significant through the CWCR with talkback, whereas there was no significant difference in the achievement in the rest of the '7' programmes with and without talkback

6 Reactions of Viewers Towards CWCR

The viewers were found to have positive reactions towards CWCR programmes except towards adequacy of teaching points, appropriateness of language and pronunciation and skillful conduction of demonstration.

IMPLICATIONS

(1) It is evident from the above findings that there is significant gain through the countrywide classroom ETV programmes. So the number of ETV programmes could be increased For that the infrastructural facilities for and production of countrywide classroom programmes should be expanded Also aditional time slots have to be provided for the transmission of the programmes It is quite desirable that a separate channel should be provided for the ETV programmes

(2) In a large majority of the programmes there was no significant difference in the gain of English and Hindi medium students. Whereas in the remaining 2 the gain was significantly different in favour of English medium students The programmes should be telecast in such a language that they are intelligible to multi-lingual groups and the achievement is not affected due to language lag If a programme has to be telecast in English language, then the captions could be in regional language or in Hindi.

(3) As no significant difference has been found in the native and imported programmes, so, the imported programmes could be equally utilized.

(4) In some of the programmes the gain through the talkback has been found more than without talkback So, the ETV programmes may be conducted with talkback.

(5) The language and pronunciation could be more appropriate, and the demonstration could be conducted skillfully.

It is evident from the above presentation that countrywide classroom programmes are reasonably effective. Their contents are well developed. Also, the programmes are well presented Students were mostly found to have +ve reactions towards the countrywide classroom programmes. There is a need to enrich and expand the countrywide classroom programmes.

SUGGESTIONS FOR FURTHER RESEARCH

Studies may be conducted on the effectiveness of Educational Television in various modes as follows .

(i) Direct Educational Telecasts.

(ii) Educational Telecasts followed by talk-back-live and mediated

(iii) Educational Video is the interactive mode-live and mediated.

—o—

सारांश

राष्ट्र विस्तीर्ण कक्षा सह एवं असह प्रतिवार्ता

विश्वविद्यालय अनुदान आयोग द्वारा आयोजित राष्ट्र विस्तीर्ण कक्षा कार्यक्रमो ने भारतवर्ष मे शैक्षिक दूरदर्शन को सशक्त बनाया है। लेकिन अभी भी दूरदर्शन द्वारा एक तरफा सम्प्रेषण चल रहा है जिसके कारण दर्शक स्रोत व्यक्ति के साथ अन्त: क्रिया करने का कोई अवसर नही पाता है। शैक्षिक दूरदर्शन की इस सीमा को सहायता प्रणाली द्वारा दूर किया जा सका है जहाँ दर्शक उत्तर दर्शन सत्र के दौरान विषय विशेषज्ञ के साथ अन्त. क्रिया कर सकते है। इसी सहाय्य प्रणाली को प्रतिवार्ता कहते है। इस प्रणाली मे दर्शन सत्र के दौरान शिशुच्छुओं द्वारा उठाए गए मूल्य प्रश्नो का स्पष्टीकरण शिक्षक या विशेषज्ञ कृत्रिम अवस्था मे करता है।

सितम्बर १९९० से जनवरी १९९१ तक प्रसारित राष्ट्र विस्तीर्ण शैक्षिक दूरदर्शन कक्षा समाज विज्ञान कार्यक्रमों मे से दस कार्यक्रम रिकार्ड किए गए। समाज विज्ञान वर्ग के ४० स्नातक छात्रों को अध्ययन के लिए न्यादर्श के रूप मे लिया गया। पूर्व परीक्षण के रूप में कार्यक्रमो की विषय-वस्तु पर एक निष्पत्ति परीक्षण की रचना कर सम्पादित किया गया। कार्यक्रम दिखलाने के बाद सम्पूर्ण समूह को दो छोटे उपसमूहों मे बिना किसी क्रम के विभाजित किया गया। एक उपसमूह पर उसी पूर्व परीक्षण को परीक्षण के लिए लगाया गया, जबकि दूसरे उपसमूह ने प्रतिवार्ता की। पुन प्रतिवार्ता समूह पर प्रतिवार्ता सत्र के पश्चात वही पूर्व परीक्षण पश्च परीक्षण के रूप मे लागू किया गया। पूर्व परीक्षण आकड़ो को सहचर के रूप मे लेकर सहचर विश्लेषणात्मक प्रविधि की सहायता से प्रदत्तो का विश्लेषण किया गया। यह पाया गया कि प्रतिवार्ता राष्ट्र विस्तीर्ण या देशव्यापी कक्षा के १० कार्य-क्रमो मे से ३ कार्यक्रमो पर उपलब्धि सार्थक रूपेण प्रभावोत्पादक है, जबकि शेष सदर्भित प्रतिवार्ता कार्यक्रमो की उपलब्धि मे कोई सार्थक अन्तर नही पाया गया।

नमिता साहू एव
डी० आर० गोयल

योग साधना की सच्ची नींव

जिन कठिनाइयो और कुप्रवृत्तियो का तुम पर आक्रमण होता है, उनके साथ बर्ताव करने मे सभवत: तुम यह भूल करते हो कि तुम उनके साथ बहुत अधिक तादात्म्य स्थापित कर लेते हो और उन्हे अपनी प्रकृति का अंग समझने लगते हो तुम्हे तो बल्कि उनसे अलग हो जाना चाहिये, अपने-आप को उनसे निर्लिप्त और वियुक्त कर लेना चाहिये, यह समझना चाहिये कि वे अपूर्ण और अशुद्ध विश्वव्यापी निम्न प्रकृति की क्रियाएँ है, वे ऐसी शक्तियाँ है जो तुम्हारे अन्दर प्रवेश करती और अपनी अभिव्यक्ति के लिये तुम्हे अपना यन्त्र बनाने की चेष्टा करती है। इस प्रकार अपने-आप को इनसे निर्लिप्त और वियुक्त कर लेने पर तुम्हारे लिये यह अधिक सम्भव हो जायेगा कि तुम अपने एक ऐसे भाग का--अपनी आंतर या अपनी चैत्य सत्ता का--पता पा लो और उसी मे अधिकाधिक निवास करने लगो जो इन सब बाह्य वृत्तियों से आक्रांत या पीडित नही होता, इन सबको अपने से विजातीय समझता है और स्वभावत ही इन्हे अनुमति देने से इन्कार करता है और अपने-आपको निरन्तर भागवत शक्तियो तथा चेतना के उच्चतर स्तरो की ओर मुड़ा हुआ या उनसे सम्बन्धित अनुभव करता है। अपनी सत्ता के उस भाग को ढूंढ निकालो और उसी मे निवास करो, ऐसा करने मे समर्थ होना ही योगसाधना की सच्ची नीव है।

श्रीअरविन्द

अपूर्णता बाधक नहीं

अपूर्णताओ का होना, यहाँ तक कि बहुत अधिक और भयानक अपूर्णताओं का होना भी योगसाधना की उन्नति में स्थायी रूप से बाधक नही हो सकता। (मै यहाँ यह नही कहता कि पहले जो उद्घाटन हो चुका है वह फिर से प्राप्त होगा, क्योंकि मेरा अनुभव तो यह बतलाता है कि प्रतिरोध और सघर्ष का काल निकल जाने पर साधारणत: एक नवीन और बृहत्तर उद्घाटन होता है, एक विशालतर चेतना प्राप्त होती है तथा पहले जो कुछ प्राप्त किया गया था पर जो उस समय खो गया मालूम होता था--किन्तु केवल मालूम ही होता था--उससे भी साधक आगे बढ जाता है।) एकमात्र वस्तु जो स्थायी रूप से बाधक हो सकती है--परन्तु उसका भी होना आवश्यक नही है, कारण उसे भी परिवर्तित किया जा सकता है--वह है मिथ्याचार, सच्चाई का अभाव, और वह तुममे नही है। अगर अपूर्णता बाधक होती तो कोई भी मनुष्य योग मे सफलता न प्राप्त कर सकता, कारण सब मनुष्य ही अपूर्ण हैं।

श्रीअरविन्द

Urbashi Barot

A STUDY OF THE ATTITUDES OF UNDERGRADUATE COLLEGE-GOING STUDENTS TOWARDS ENGLISH-LANGUAGE TEACHERS AND TEACHING

If the learner is at the core of any learning and teaching situation, the teacher and the way he teaches are of almost equal importance This is especially so in the case of English in India, which is almost invariably a Second Language that has to be learnt and taught formally rather than acquired naturally. The progress of learners is closely connected to their relationship with their teachers, whose personal qualities, therefore, are of utmost importance.

There is general agreement among students everywhere about what an 'ideal' teacher should be - intelligent, sympathetic, emotionally mature, with adequate classroom management skills and a sufficient command of the subject, who must also be seen to be abreast of current development in his subject and to be constantly attempting to improve himself. The question is, however, as to how closely the actual teacher resembles the ideal, and whether the differences between the two are wide enough to reduce the students' chances of learning.

As part of an investigation into the effectiveness of English-Language Teaching (ELT) in the undergraduate colleges of MP a test of attitudes of these students towards English was conducted in Jabalpur between July 1990 and August 1991, using a self-reporting questionnaire developed after a pilot study on 50 students and interviews with students and teachers of 11 colleges.

Dr (Mrs.) Urbashi Barot, Senior Lecturer in English, Rani Durgavati Vishwavidyalaya, Jabalpur.

An important area covered by the questionnaire was the attitudes of students towards their English teachers and their teaching.

OBJECTIVE

To study and compare the attitudes of undergraduate college going students towards English teachers and teaching.

HYPOTHESES

1. Students of the Science Faculty (SF), who are more exposed to English and require English more than students of other Faculties (OF), are more favourably inclined towards English than the latter.

2 English-medium students (EM) would have a significantly more positive attitude towards their English teachers and teaching than Hindi-medium students (HM)

VARIABLES

Independent Variables : 1. SF and OF; 2. EM and HM — Both male and female students

Dependent Variables : Attitude towards English teaching and teachers.

Control Variables Age—17 to 19 years.

SELECTION OF SAMPLE

The studies were conducted on (1) a sample consisting of 85 male/female students 85 male/female students of other Faculties randomly selected from 11 colleges of Jabalpur . and (2) a sample consisting of 90 male/female English-medium students and 90 male/female Hindi-medium students randomly selected from these colleges.

THE TOOL

Self-made questionnaire to measure attitudes and interviews with students.

PROCEDURE

The questionnaire was given personally to students Their responses were noted and the number of frequencies tabulated. Since each question was important, chi-squares were calculated for each answer separately for the analysis of results. Personal interviews of over 150 students from all Faculties and both mediums of instruction were also conducted

RESULTS AND DISCUSSION

The tables below show the value of chi-squares and the significance and differences between (1) SF and OF, and (2) EM and HM

TABLE 1

Significance of Difference Between SF and OF in their Attitude Towards ELT

ATTITUDE TOWARDS ENGLISH LANGUAGE TEACHING

S.N	Questions	Groups	RESPONSES Always	Some-times	Never	Value of chi-square	Value of significance
1.	Are your English classes held regularly	SF	19	14	52	14.80	0.001
		OF	6	33	46		
2	Do you feel that your English Language classes have helped to improve your English ?	SF	18	3	64	14 36	0 001
		OF	32	12	41		
3.	Are your English classes interesting ?	SF	7	16	62	4.90	N.S.[1]
		OF	2	25	58		
4.	Do you feel more English Language classes are required to finish your English ?	SF	25	3	57	13 78	0.01
		OF	48	4	33		
5.	Do you think more English Language classes are required to help you improve your English ?	SF	56	3	26	79.44	0 001
		OF	2	24	59		
6.	Would you find remedial classes in English Language more useful if they did not interfere with your other studies ?	SF	11	12	62	14 04	0.001
		OF	3	31	51		

[1] N.S =Not Significant Statistically.

TABLE 2

Significance of Difference Between SF and OF in their Attitudes Towards English teachere

S.N.	Questions	Groups	RESPONSES Always	Some-times	Never	Value of chi-square	Value of significance
1	Is your English teacher very strict ?	SO	50	32	3	5 70	N.S.*
		OF	62	18	5		
2.	Do you feel your English teacher does not take enough interest in teaching your class ?	SF	2	25	58	23 28	0 001
		OF	25	18	42		
3.	Does your English teacher teach you any English outside the course textbook ?	SF	35	22	28	16 00	0 001
		OF	20	11	54		
4.	Do you feel that your teachers are more impressed by students who are fluent in English ?	SF	63	14	8	7 94	0.02
		OF	72	3	10		

* N.S.=Not Significant Statistically.

The results of the questionnaire indicate that on the whole the hypothesis, that SF have a more positive attitude towards English-Language Theaching and towards their teachers, is maintained Though most students regardless of Faculy do not believe that their English classes are held regularly or find them interesting, SF are generally more favourably inclined towards ELT and their English teacher's even though, unexpectedly, they did not feel that their English classes helped to improve their proficiency in the language. (This was also borne out by their comments in the interviews, as reported below.) Perhaps because SF are generally more proficient in English—certainly they are significanty better in their overall academic performance—and are more exposed to the language, because of the nature of their elective subjects, they have not felt the need for more English classes to finish the course. But they do accept that they need to improve their English, and

agree that more classes should help, however, they are not in favour of remedial classes, but, as the interviews made clear, would like classes in spoken English based on situational requirements or some kind of 'English-for-Special-Purposes' course. This was implied also in the view often held that teachers are more impressed by students fluent in English. In fact. SF even find their English teachers interested and helpful

What is of interest is the positive attitude of OF too Even though they feel that their classes are not held regularly enough. They believe that their English classes have helped to improve their proficiency, they would like more classes to help them finish their course, and they would even welcome remedial classes. Unlike SF, they do not feel that their English teachers are interested in teaching them, nor are they taught any English outside the prescribed textbooks, but like them, they find their teachers are more impressed by students who speak English fluently

TABLE 3

Significance of Difference Between EM and HM in their Attitude Towards ELT

S.N.	Questions	Groups	RESPONSES Always	Some-times	Never	Value of chi-square	Value of Significance
1.	Are your English classes held regularly ?	HM	26	9	55	4.70	N.S.*
		EM	99	10	41		
2.	Do you feel that your English language classes have helped to improve your English ?	HM	0	35	55	2.26	N.S.*
		EM	0	45	45		
3.	Are your English classes interesting ?	HM	5	21	64	3 26	N.S *
		EM	12	18	60		
4.	Do you feel more English language classes are required to finish your course ?	HM	6	15	69	17.40	0.001
		EM	0	37	53		

5.	Do you think more English Language classes are required to help you improve your English ?	HM	11	8	71	14.22	0.001
		EM	1	21	68		
6.	Would you find remedial classes in English language more useful if they did not interfere with your other studies ?	HM	42	6	43	68 88	0.001
		EM	1	46	43		

* N S.=Not Significant Statistically

Note : Yate's correction done when frequencies in one cell are 5 or less than 5.

TABLE 4

Significance of Difference between EM and HM in their Attitudes towards English Teachers

S N.	Questions	Groups	RESPONSES Always	Some-times	Never	Value of chi square	Value of Significance
1.	Is your English teacher very strict ?	HM	1	7	82	1.92	N.S.*
		EM	0	4	87		
2	Do you feel that your English teacher does not take enough interest in teaching your class ?	HM	11	16	63	5.64	N S *
		EM	16	6	68		
3.	Does your English teacher teach you any English outside the course textbook ?	HM	0	59	32	4.06	N.S *
		EM	1	68	21		
4.	Do you feel that your teachers are more impressed by students who are fluent in English	HM	19	14	57	15 84	0 001
		EM	11	38	41		

* N.S.=Not significant statistically.

It is evident that some results in Table 3, presenting attitudes towards ELT, English Medium v/s Hindi Medium, are highly significant and in the expected direction, while there is no significant difference between EM and HM in their attitudes towards English teachers, as seen in Table 4, most students, whatever their medium of instruction, do not feel that their classes are held regularly, nor that they have helped to improve their English, nor, indeed, that they are interesting While most do not feel that their English teachers are forbiddingly strict and unapproachable, they also do not think that their teachers are interested in teaching them Only sometimes do the teachers go beyond the prescribed textbooks and actually attempt to teach them the language together with the texts prescribed. Once again, this was also corroborated by their verbal comments in their interviews Interestingly, more EM than HM believe that teachers are more impressed by students who speak the language fluently. Perhaps this was because, as the interviews suggested, EM feel superior to HM in the mixed classroom

Overall, then, SF have a more mixed attitude towards ELT and English teachers, while OF are generally more negative; similarly, HM are more negative than EM

INTERVIEWS WITH STUDENTS

Interviews with students before, during and after the administration of the questionnaires bore out most of these findings. While the overall attitude towards English in all groups was certainly not unfavourable, and in many cases quite positive, it was clear that students of all Faculties and both mediums of instruction were not happy with their teachers nor with the way they were taught Particular resentment was reserved for what many regarded as superciliousness and aloofness on the part of English teachers, favouritism shown to EM in the mixed classroom, and their general lack of interest in teaching them English even though most do in fact to though the prescribed textbooks with a view to preparing students for the University examinations.

SUGGESTIONS

While it may be unrealistic to expect that student attitudes towards teachers and the way they teach can change overnight, teachers can help to translate the overall positive attitude towards English into more effective teaching and learning. It is, after all, quite within every teacher's grasp to take his classes regularly, avoid using guides and 'keys' himself or recommending them to his students, and otherwise attempt to carry out his duties

as conscientiously as possible, by presenting material in an optimal manner, plugging the gaps in the learner's learning, monitoring his progress, and if and where necessary arranging for remedial teaching. The teacher should never forget that he is there to teach the language, not merely to go through the textbook or to prepare the student for examinations, although, of course, these are essential, too, and if not attended to will arouse considerable resentment that will prove even more detrimental to the learning process.

Continuous, personal, long-term encouragement of the learning is an inevitable part of the teacher's duty. Accordingly, achievement is likely to improve if teachers are regarded as being less forbidding—in Strevens's terms, more 'non-discouraging' and more highly motivated. Sarcasm and attacks upon the student's self-esteem must therefore be eschewed, and teaching techniques be shaped not so much to the requirements of the course-books but to the motivations of the learner. Within the limitations of the teaching situation the English teacher has to evince interest in the learner, take pains to establish a personal rapport with him, and try to show him that he is approachable, unbiased and interested in his work. Only then can her and his teaching become more effective.

REFERENCES

Allen, Harold B. and Campbell, Russell N , eds. (1977) *Teaching English as a Second Language . A Book of Readings.* New Delhi : Tata McGraw

Anisfeld, Moshe, and Lambert, W E 'Social and Psychological Variables in Learning Hebrew'. *Journal of Abnormal and Social Psychology* 63 . 524-9.

Bloom, B S , ed. (1972). *Taxonomy of Educational Objectives.* London : Longman.

Brooks, Nelson. (1960) *Language and Language Learning : Theory and Practice.* New York : Harcourt

Dulay, H , Burt, M., and Krashen, Stephen. (1982). *Language Two* New York : Oxford UP

Gardner, R , and Lambert, W., ed. (1972) *Attitudes and Motivation in Second Language Learning.* Rowley : Newbury House

Lambert, W. E., and Gardner, R. C. (1959) Motivational Variables in Second Language Learning. *Canadian Journal of Psychology* 13 : 266-72.

Lukmani, Y (1972). 'Motivation to Learn and Language Proficiency'. *Language Learning* 22 · 261-73

Strevens, P. (1985). *New Orientations in the Teaching of English* London : Oxford UP.

सारांश

स्नातक स्तर के महाविद्यालयीन छात्रों की अंग्रेजी भाषा के शिक्षक एवं शिक्षा की अभिवृत्तियों का अध्ययन

भारत में अंग्रेजी शिक्षा एवं शिक्षण दोनों के प्रति एक मिली-जुली प्रतिक्रिया है क्योंकि स्वाभाविक रूप से इस भाषा को हम नहीं सीखते है--अपितु औपचारिक रूप से इसकी शिक्षा व शिक्षण का प्रचलन है। अंग्रेजी-भाषा अधिगम इस बात पर निर्भर करता है कि छात्र व शिक्षक के मध्य क्या सम्बन्ध है तथा छात्र की इस भाषा के प्रति क्या अभिवृत्ति है ?

इस सन्दर्भ मे इस शोध में महाविद्यालय के विज्ञान सकाय एव अन्य संकाय के छात्र-छात्राओं को लेकर तुलनात्मक अध्ययन किया गया और परिकल्पना बनाई गई कि विज्ञान सकाय के विद्यार्थी अन्य सकाय के विद्यार्थियो की तुलना मे अंग्रेजी भाषा व शिक्षक के प्रति धनात्मक अभिवृत्ति रखेगे। साथ ही यह भी आशा की गई कि अंग्रेजी माध्यम से शिक्षा पाने वाले विद्यार्थी हिन्दी माध्यम से पढने वाले विद्यार्थियों की अपेक्षा अंग्रेजी-भाषा व शिक्षक के प्रति अधिक धनात्मक अभिवृत्ति रखेगे।

आशानुकूल–विज्ञान सकाय एव अंग्रेजी माध्यम से पढने वाले विद्यार्थियो ने अधिक धनात्मक अभिवृत्ति प्रकट की--वैसे मिश्रित भावनाओ को प्रकट करते हुए अधिकांश विद्यार्थी इस भाषा को और अधिक पढना, समझना चाहते हैं। वही इस भाषा के शिक्षकों का भी कर्तव्य हो जाता है कि वे समर्पित हो इस भाषा का ज्ञान अपने विद्यार्थियो को दे।

शरणागतियोग

(भगवान् श्रीकृष्णका दिव्य उपदेश)

मां हि पार्थ व्यापाश्रित्य येऽपि स्यु पापयोनय ।
स्त्रियो वैश्यास्तथा शूद्रास्तेऽपि यान्ति परा गतिम् ॥
कि पुनर्ब्राह्मणा पुण्या भक्ता राजर्षयस्तथा ।
अनित्यमसुख लोकमिम प्राप्य भजस्व माम् ॥ (९ । ३२-३३)

हे अर्जुन ! मेरे अनन्यशरण होकर स्त्री, वैश्य और शूद्रगण तथा चाण्डालादि पापयोनिवाले भी निश्चय परमगतिको प्राप्त होते है । फिर पुण्ययोनि ब्राह्मण तथा राजर्षि (मेरे शरणागत) भक्तोकी तो बात ही क्या है । अतएव तुम इस सुखरहित और अनित्य मनुष्यजन्मको पाकर निरन्तर मेरा ही भजन करो ।

मन्मना भव मद्भक्तो मद्याजी मा नमस्कुरु ।
मामेवैष्यसि युक्त्वैवमात्मानं मत्परायण: ॥ (९ । ३४)

तुम मुझमे ही मन रक्खो, मेरे ही भक्त बनो, मेरा ही पूजन करो और मुझे ही नमस्कार करो । इस प्रकार मेरे शरण होकर आत्माको मुझमे समाहित करके तुम मुझको ही प्राप्त होओगे ।

सर्वगुह्यतम भूय शृणु मे परम वच: ।
इष्टोऽसि मे दृढमिति ततो वक्ष्यामि ते हितम् ॥ (१८।६४)

सब गोपनीयोमे भी परम गोपनीय मेरे परम रहस्ययुक्त वचन तुम फिर सुनो । तुम मेरे अत्यन्त प्रिय हो, इसीलिये तुम्हारे हित की बात बताता हूँ ।

मन्मना भव मद्भक्तो मद्याजी मा नमस्कुरु ।
मामेवैष्यसि सत्य ते प्रतिजाने प्रियोऽसि मे ॥
सर्वधर्मान् परित्यज्य मामेक शरण व्रज ।
अह त्वा सर्वपापेभ्यो मोक्षयिष्यामि मा शुच: ॥ (१८ । ६५-६६)

हे अर्जुन ! तुम केवल मुझमे ही मन रक्खो, मेरे ही भक्त बनो, मेरा ही पूजन करो और मुझे ही नमस्कार करो । ऐसा करनेपर तुम मुझको ही प्राप्त होओगे । यह मै तुम्हे सत्य प्रतिज्ञा करके कहता हूँ, क्योंकि तुम मेरे (बहुत ही) प्यारे हो । सब धर्मो (दूसरे सब तरहके आश्रयो) को त्यागकर एकमात्र मेरी ही अनन्य-शरणमे आ जाओ । मै तुम्हे सब पापोसे सर्वथा छुड़ा दूंगा । तुम चिन्ता न करो ।

यही सर्वोत्तम योग है

Bharat Singh

A COMPARATIVE STUDY OF THE EFFECTIVENESS OF DISCUSSION METHOD AND THE TRADITIONAL METHOD AT B. Ed. LEVEL

The major responsibility of a teacher is to teach effectively in his class. The knowledge of different teaching methods is, therefore, necessary for a teacher for effective teaching in the varying class-room situations. A teacher using traditional method (Lecture method) does not employ suitable teaching skills as the class-room situations demand. He does not pay attention to the use of different teaching skills.

The discussion method is very popular and important method for the higher classes. There is more chances of interaction between the students and teachers while discussion is going on. A comparative study of discussion method and traditional method has not been undertaken so far in our country. But some studies have been conducted abroad in the area of teaching methods In India unfortunately this area is almost untouched, till now As substantiated by the review of literature, the investigator found this area very challenging one. Keeping in view the importance of the problem, the investigator decided to compare the effectiveness of discussion method with the traditional method of teaching.

Thus the problem may be stated as follows :—

"A comparative study of the effectiveness of discussion method and traditional method at B Ed. level."

Dr. Bharat Singh is Lecturer in Deptt. of Education, R H.S P G. College, Singramau, Jaunpur

OBJECTIVE

The study was carried out with the following specific objective in view.

To study the effectiveness of discussion method vis-a-vis the traditional method (Lecture method) at B.Ed. level.

HYPOTHESES

The following hypotheses were formulated and tested for achieving the objective of this study :—

1 There is no significance difference between the mean scores of students treated by the discussion method (Experimental group) and those treated by the traditional method of teaching (control group) at pre-test level.

2. There is no significant difference between the mean scores of the students treated by the discussion method and those taught by traditional method of teaching at post-test level.

METHODOLOGY
RESEARCH DESIGN

Pre-test, post-test parallel group research design was employed to carry out the present study.

SAMPLE

A sample of 100 student teachers enrolled for B.Ed. course (Session 92-93) in R.H.S P.G. College, Singramau, Jaunpur affiliated to Purvanchal University, Jaunpur was randomnly selected. The control and experimental groups of student teachers were matched on the variables of sex, area and marks of entering behaviour test.

TOOLS

1 Entering behaviour test (E.B T.) developed by the investigator himself was used for matching the control and experimental groups

2. The discussion method was employed in teaching the selected topics of Educational Psychology to the experimental group.

3 Lecture method was used for teaching the same topics of Educational Psychology to control group.

4. Terminal behaviour test (T.B.T.) developed by the investigator himself

was used to find out the achievement scores of both the groups before and after the teaching of assigned topics.

DATA COLLECTION

1 Terminal Behaviour test was administered on both the groups before giving any treatment to any group these scores form pre-test scores.

2. Experimental group was taught with the help of discussion method whereas the control group was taught by the traditional method (Lecture method).

3. T.B T was administered on both the groups after giving treatment. These scores form post-test scores.

RESULT AND INTERPRETATION

On the basis of the obtained scores on T B.T. for control and experimental group at pre-test and post-test levels the mean scores, S D. and SED were computed. Those are shown in tabular form as below :—

TABLE 1

The mean scores of experimental and control group at pre-test stage

Group	Number	Mean	SD	SED	CR
Expt.	50	2.14	2.14	1.045	1.01*
Cont.	50	3.2	2 35		

* Not significant.

The table reveals that there is no significant difference between the mean scores of experimental and control group at pre-test level. It implies that both the groups are equal in every respect. Hence, the hypothesis No. 1 is accepted.

TABLE 2

Group	Number	Mean	SD	SED	CR
Expt.	50	22.3	6 64	1.24	2.01**
Cont.	50	19.8	5.82		

** Significant at 0 05 level.

Table—2 shows that both the groups have different mean scores at post-test level. The mean difference was found to be significant at 0.05 level of confidence.

It denotes that discussion method contributed more to the achievement of student-teachers in comparison with the traditional method of teaching (Lecture-method) Hence the hypotheses No. 2 is not accepted. It may be interpretted that discussion method is more effective than the traditional method.

The finding of the present study are supported by the findings of Gupta, B.C (1973) and Julka G.L. (1974)

CONCLUSION AND EDUCATIONAL IMPLICATIONS

On Perusal of the above statistional derivations and their interpretations it is evident that discussion method is certainly superior to lecture method as such it is advisable to the teachers in genral that they should prefer discussion method to enhance the effectiveness of their teaching which will consequently modify the entering behaviour of the students, the core of our teaching

REFERENCES

1. Best, J. W. *Research in Education*, New Delhi. Prentice Hall of India Pvt. Ltd., 1963.
2. Buch, M. B. *Second Survey of Research in Education* (1977-78) National Council of Educational Research & Training, New Delhi.
3. Dececco, John, P (1964) *Educational Technology*, Reading in Programmed Instruction, New York Holt Rine Hart and Winston Daviz.
4. Fisher, R A. (1950). *Statistical Methods for Research Works*, New York : Hefner Publishing Company.

सारांश

उच्च कक्षा अध्यापन मे प्रमुख रूप से प्रवचन विधि (परम्परागत विधि) ही प्रयुक्त की जाती है। अन्य विधियों जैसे वाद-विवाद विधि, समस्या समाधान विधि, सेमिनार विधि आदि का प्रयोग न के बराबर है।। एक अध्यापक कक्षा शिक्षण को तभी प्रभावशाली बना सकता है जब वह शिक्षण की उत्तम विधि को अपनाता है। उत्तम विधि की जानकारी शिक्षण विधि की दिशा मे किये गये शोध कार्य के फलस्वरूप

ही प्राप्त होती है। इसी बात से प्रेरित होकर प्रस्तुत अध्ययन मे बी एड कक्षा स्तर पर वाद-विवाद विधि एवं प्रवचन विधि का तुलनात्मक अध्ययन करने का प्रयास किया गया है। अध्ययन हेतु बी. एड. कक्षा मे अध्ययनरत १०० छात्राध्यापकों को नियत विधि (रैन्डम मेथड) से दो बराबर समूहों मे विभक्त किया गया। प्रत्येक समूह में ५० छात्राध्यापकों को रखा गया। प्रयोगात्मक समूह को एक विषय वस्तु वाद-विवाद विधि (डिस्कशन मेथड) से पढ़ायी गई तथा वही विषय-वस्तु उतने ही समय तक नियन्त्रित समूह को प्रवचन विधि (लेक्चर मेथड) से पढ़ायी गयी। पढाने के पहले ई. बी. टी. (पूर्व व्यवहार परीक्षण) एव पढ़ाने के पश्चात् टी. बी. टी (अन्त्य व्यवहार परीक्षण) का प्रशासन दोनों समूहों पर किया गया। प्राप्त आकडों के विश्लेपण से मालूम हुआ कि प्रयोगात्मक एवं नियन्त्रित समूहों की औसत उपलब्धि २२.३ एव १६ ८ रही। गणना से प्रा० वि० ६.६४ एव ५.८२ तथा प्रामाणिक त्रुटि १ २४ तथा सी. आर २ ०१ मिला। सारिणी मे देखने से दोनों मध्यमानो का अन्तर ० ०५ पर सार्थक है।

अत वाद-विवाद विधि से अध्यापित समूह, नियन्त्रित समूह की तुलना में अधिक लाभान्वित रहे। अत उच्च कक्षाओ में अध्यापन हेतु प्रवचन विधि की तुलना मे वाद-विवाद विधि अधिक प्रभावशाली है।

भरत सिह

अचचल रहते हुए अभीप्सा

यह आवश्यक है कि तुम अपने अन्दर की अशुद्ध वृत्तियों को देखो और जानो, क्योंकि वे ही तुम्हारे दु ख के मूल है और अगर तुम्हें उनसे छुटकारा पाना हो तो तुम्हे उनका लगातार त्याग करना ही होगा। परन्तु तुम बराबर अपने दोषो और अशुद्ध वृत्तियो का ही चिन्तन मत किया करो। तुम उस बात पर अधिक अपना ध्यान एकाग्र करो जो तुम्हें होना है, जो तुम्हारा आदर्श है और यह विश्वास बनाये रखो कि जब यही तुम्हारा लक्ष्य है तब इसे पूरा होना ही होगा और यह अवश्य पूरा होगा।

बराबर दोषा और अशुद्ध वृत्तियो को देखते रहने से चित्त उदास होता है और श्रद्धा दुर्बल होती है। अपनी दृष्टि को किसी वर्तमान अन्धकार की अपेक्षा आने वाले प्रकाश की ओर अधिक लगाओ। श्रद्धा, प्रसन्नता और अन्तिम विजय मे विश्वास—ये सब चीजे ही सहायता करती है, ये प्रगति को अधिक सहज और तीव्र बनाती है।

जो अच्छी अनुभूतियाँ तुम्हे प्राप्त होती हैं उनका अधिक-से-अधिक लाभ उठाओ, वैसी एक भी अनुभूति इन पतनो और विफलताओ से कही अधिक महत्त्वपूर्ण है। पर जब ऐसी अनुभूति बन्द हो जाय तो उसके लिए अनुताप मत करो या उसके कारण निरुत्साहित मत हो जाओ, बल्कि भीतर मे शांत बने रहो और यह अभीप्सा करो कि वह फिर से एक अधिक स्थायी रूप ग्रहण करके आये तथा और भी अधिक गम्भीर और पूर्ण अनुभूति की ओर ले जाय। सर्वदा अभीप्सा करो, पर करो अधिकाधिक अचचल रहते हुए तथा भगवान् की ओर अपने-आपको सरल और सम्पूर्ण रूप में उद्घाटित करते हुए। —**श्री अरविन्द**

सच्चा विवेक

चीजों को देखना एक बात है और उन्हे अपने अन्दर घुसने देना एकदम दूसरी बात है। साधक को बहुत सी चीजो का अनुभव लेना होता है, उन्हे देखना और भली-भाँति निरीक्षण करना होता है, उन्हे चेतना के क्षेत्र में ले आना होता है और यह जानना होता है कि वे क्या है। परन्तु इसका कोई कारण नही कि तुम उन्हें अपने अन्दर घुसने दो और अपने ऊपर अधिकार जमाने दो। केवल भगवान् को या जो कुछ भगवान के यहाँ से आता है उसको ही तुम्हें अपने अन्दर प्रवेश करने देना चाहिये।

यह कहना कि सभी प्रकाश अच्छा है, ठीक यह कहने के समान है कि सभी जल अच्छा है--अथवा यह कहना कि सभी निर्मल या स्वच्छ जल अच्छा है, परन्तु यह बात ठीक नही हो सकती। इसके पहले कि कोई यह कह सके कि यही सच्चा दिव्य प्रकाश है, उसे यह देखना ही होगा कि यह प्रकाश किस प्रकार का है। अथवा यह कहाँ से आ रहा है अथवा इसके अन्दर क्या है। मिथ्या प्रकाश भी है और भ्रम मे डालने वाली चमके भी है, सत्ता के हीनतर स्थानो से सम्बन्ध रखने वाले निम्न कोटि के प्रकाश भी है। अतएव साधक को इस विषय मे खूब सावधान रहना चाहिये और उनके पार्थक्य को समझना चाहिये; सच्चा विवेक अन्तरात्मा की बोध-शक्ति, विशुद्ध मन तथा अनुभूति का विकास होने पर प्राप्त होता है।

—o—

साधारणत चेतना शरीर के अन्दर आबद्ध रहती है, और मस्तिष्क, हृदय और नाभि के अर्थात् मन, भावावेग तथा इंद्रियबोध के केन्द्रो मे, केन्द्रीभूत रहती है। जब तुम यह अनुभव करते हो कि यह चेतना या इसका कोई भाग ऊपर जाता है और सिर के ऊपर जाकर स्थान ग्रहण करता है तब इसका मतलब यह है कि वह बँधी हुई चेतना शरीर के बधन से मुक्त हो रही है। वास्तव मे तुम्हारी मनोमय चेतना ही इस तरह ऊपर जाती है, साधारण मन की अपेक्षा किसी उच्चतर वस्तु का सस्पर्श प्राप्त करती है और यहाँ से आधार के शेष भागो को रूपातरित करने के लिये उन पर उच्चतर मानसिक संकल्प का प्रयोग करती है। कपन और उष्णता का अनुभव होता है एक प्रकार के प्रतिरोध के कारण, शरीर और प्राण को इस प्रकार की माँग पूरी करने का और इस प्रकार की मुक्ति का अभ्यास न होने के कारण। जब मनोमय चेतना स्थायी रूप से इस प्रकार ऊपर स्थित हो जाती है अथवा जब चाहे तब ऊपर उठ सकती है तभी मुक्ति की यह प्रथमावस्था सिद्ध हो जाती है। वहाँ से फिर मनोमय पुरुष उच्चतर स्तरो की ओर अथवा विश्वसत्ता और उसकी शक्तियो की ओर अपने-आपको स्वच्छदतापूर्वक खोल सकता है और कही अधिक स्वतन्त्रता और शक्ति के साथ निम्नतर प्रकृति पर क्रिया भी कर सकता है।

श्री अरविन्द

उमाकान्त सक्सेना

प्रान्तीय स्तर पर खेलों के लिये चुनी गयी बालिकाओं के मूल्यों का अध्ययन

मूल्य आधारित समाज के निर्माण मे बालिकाओ का विशिष्ट स्थान होता है। वे समाज मे मित्र, बहन, पत्नी एवं माँ के रूप मे उपस्थित रहती है। प्रत्येक रूप मे अपने चरित्र का प्रभाव डालती हैं। जीवनपर्यन्त व्यक्तित्व का निर्माण माँ द्वारा दिये गये मूल्यों पर ही आधारित होता है। यद्यपि मूल्यो पर प्रभाव पिता, मित्र, समाज तथा देश की सस्कृति सभी का पडता है लेकिन मूल आधार माँ से ही प्राप्त होता है। अत. यदि बालिका का प्रारम्भ से ही स्वस्थ मानसिक एव शारीरिक विकास हो, तो वह देश के लिए कर्मठ व्यक्तियों को उत्पन्न एव पोषित कर सकती है। इसे ही केन्द्रबिन्दु मानकर बालिकाओ के सरस्वती विद्या मन्दिर विद्यालयों में शिक्षा प्रदान की जाती है एव खेल-कूद उत्सवो का आयोजन होता है। खेल-कूद मे अच्छी बालिकाओ में वांछित मूल्यो का होना भी स्वाभाविक ही है। जिससे उनमे समूह मे कार्य करने की योग्यता विकसित होती है, तथा वे स्वय कर्मठ बनती है। उनमे शारीरिक व मानसिक जागरूकता बनी रहती है। आवश्यकतानुसार समाज को नेतृत्व भी प्रदान करती है। अत स्पष्ट है कि खेल एव मूल्यो के सम्बन्ध अत्यन्त घनिष्ट होते है। इस शोध कार्य मे यही जानने का प्रयास किया गया है।

शोध का उद्देश्य

उत्तर प्रदेश के सरस्वती विद्या मदिरों में बालिकाओं को विभिन्न खेलो को खेलने का अवसर दिया जाता है तथा गुणवत्ता के आधार पर उनका जिले एवं प्रान्तीय स्तर

उमाकान्त सक्सेना, शोध अधिकारी, भारतीय शिक्षा शोध सस्थान, सरस्वती कुज, निरालानगर, लखनऊ–२२६०२० ।

पर चुनाव होता है । इसी संदर्भ मे प्रान्तीय खेल-कूद प्रतियोगिता १४-१७ अक्टूबर ९३ का आयोजन सरस्वती कुंज, निरालानगर, लखनऊ मे हुआ था । जिसमे प्रान्तीय स्तर पर चुनी गयी बालिकाओ से मूल्य-मापनी भरवाई गई थी । जिसका उद्देश्य खेल मे अच्छी बालिकाओ मे देशभक्ति, सामाजिक एव धार्मिक मूल्यों का अवलोकन करना था । इस शोध-कार्य के मुख्य उद्देश्य निम्नलिखित है .—

१ — प्रान्तीय स्तर पर खेलो के लिये चुनी गयी बालिकाओ मे देशभक्ति, सामाजिक तथा धार्मिक मूल्यों को ज्ञात करना ।

२ — कक्षा ६, ७ तथा ८ की अध्ययनरत बालिकाओं मे देशभक्ति, सामाजिक तथा धार्मिक मूल्यो का तुलनात्मक विवेचन करना ।

परिकल्पना

शोध कार्य हेतु दो शून्य परिकल्पनाएँ निरूपित की गई है

१ — प्रान्तीय खेल-कूद की प्रतियोगी बालिकाओ मे देशभक्ति, सामाजिक तथा धार्मिक मूल्यो मे परस्पर कोई सार्थक अन्तर नहीं होगा ।

२ — कक्षा ६, ७, तथा ८ की अध्ययनरत बालिकाओ मे देशभक्ति, सामाजिक तथा धार्मिक मूल्यों के लिये कोई सार्थक अन्तर नही होगा ।

न्यादर्श

प्रान्तीय खेल-कूद प्रतियोगिता के समूह मे १८४ बालिकाएँ सम्मिलित थी । उनमे से उस समय कक्षा ६ मे ६३, कक्षा ७ मे ५४ तथा कक्षा ८ मे ६७ अध्ययन कर रही थी ।

उपकरण

भारतीय शिक्षा शोध संस्थान मे निर्मित मूल्य मापनी का प्रयोग किया गया है। जिसमे देशभक्ति, सामाजिक तथा धार्मिक मूल्यो पर आधारित १० प्रश्न थे । प्रत्येक प्रश्न में तीन विकल्प दिये गये थे । प्रयोगकर्ता को किसी एक विकल्प पर ✓ का चिह्न लगाना था ।

सांख्यिकीय विश्लेषण

अनुक्रियाओ का विश्लेषण दो भागो मे विभक्त किया गया है ।

१ — सभी बलिकाओ मे मूल्य—इसके अन्तर्गत सभी १८४ प्रपत्रों की अनुक्रियाओ से देशभक्ति, सामाजिक एव धार्मिक मूल्यो की बारम्बारता को वर्ग—अन्तरालो मे

वितरित किया गया । आकडो का मध्यमान, मानक विचलन तथा मानक त्रुटि ज्ञात करने के उपरात टी – परीक्षण द्वारा बालिकाओ मे मूल्यो के लिये सार्थक समानता अथवा भिन्नता को ज्ञात किया गया ।

२ .— कक्षा के अनुसार मूल्य—१८४ अनुक्रियाओं को कक्षा ६, ७ व ८ के अनुसार ०–१० तक के वर्ग –अन्तरालों मे वितरण करके उनके मध्यमान मानक विचलन तथा मानक त्रुटि की गणना की गई । ततपश्चात टी –परीक्षण से कक्षाओ मे मूल्यो की स्थिति का अवलोकन किया गया ।

परिणाम

पूरे समूह मे देशभक्ति, सामाजिक तथा धार्मिक मूल्यो का मध्यमान, मानक विचलन, मानक त्रुटि तथा तुलनात्मक दृष्टि से टी का मान तालिका – १ मे दिया गया है ।

तालिका १

N=१८४

क्र०	मूल्य	मध्यमान	मानक विचलन	सयुक्त मानक त्रुटि	टी–मान
१–	देशभक्ति	५ ८३	२ २२	देशभक्ति-सामाजिक ० २	देशभक्ति-सामाजिक के मध्य =१६.५२
२–	सामाजिक	२ ४६	१.६६	देशभक्ति-धार्मिक ० २	देशभक्ति-धार्मिक के मध्य =२० १७
३–	धार्मिक	१.६८	१ ३२	सामाजिक-धार्मिक ० २	सामाजिक-धार्मिक के मध्य =२.२६

बालिकाओं मे देशभक्ति का मध्यमान ५ ८३ है जो सामाजिक व धार्मिक मूल्य के मध्यमान से बहुत अधिक है । मानक विचलन भी अन्य मूल्यों के मानक विचलन से अधिक है । स्पष्ट है कि बालिकाओं मे देशभक्ति मूल्य सबसे अधिक पाया गया ।

अन्य मूल्य देशभक्ति की तुलना में कम पाये गये है। देशभक्ति का परिणाम सांख्यकीय के ०.०१ स्तर पर सार्थक है। अत' प्रथम परिकल्पना –खेल-कूद में सम्मिलित सभी बालिकाओं मे देशभक्ति, सामाजिक तथा धार्मिक मूल्य समान रूप से पाये जाते है, अस्वीकृत होती है। देशभक्ति मुख्य बालिकाओ मे उच्च स्तर पर व्याप्त है। सामाजिक एव धार्मिक मूल्यो मे भी सार्थक भिन्नता ज्ञात हुई है। इनमे साख्यिकीय स्तर पर सार्थक अन्तर है। दोनो के मध्यमानों मे भी अन्तर है। देशभक्ति के बाद सामाजिक मूल्य का स्थान है। तत्पश्चात धार्मिक मूल्य बालिकाओ मे पाया गया।

देशभक्ति तथा धार्मिक मूल्यो के तुलनात्मक अध्ययन मे टी–का मान ०.०१ स्तर पर सार्थक है। तथा परिणाम देशभक्ति के पक्ष मे है। सामाजिक तथा धार्मिक मूल्यों के तुलनात्मक विवेचन मे परिणाम ० ०५ स्तर पर सार्थक है तथा सामाजिक मूल्य के पक्ष मे है।

विभिन्न कक्षाओ की बालिकाओं द्वारा व्यक्त अनुक्रियाओ की बारम्बारता, मध्यमान तथा मानक विचलन नीचे दी गई तालिका मे दर्शाया गया है।

तालिका २

क्र०	कक्षा	सख्या (एन)	मूल्य					
			देशभक्ति		सामाजिक		धार्मिक	
			मध्यमान	मानक विचलन	मध्यमान	मानक विचलन	मध्यमान	मानक विचलन
१.	६	६३	५ ६८	१.६४	२ ३४	१ ४८	२ ००	१ २४
२	७	५४	६ १७	२.४२	२.५७	१ ७६	१.५०	१ ४३
३	८	६७	५ ८१	२ ३२	२ ५२	१.७०	१.८५	१ ३४
योग		१८४						

तालिका – २ से स्पष्ट है कि देशभक्ति मूल्य का मध्यमान ६ १७ सबसे अधिक कक्षा ७ की बालिकाओ मे पाया गया। इस कक्षा का मानक विचलन २ ४२ भी अन्य मूल्यो के मानक विचलन से उच्च है। सामाजिक मूल्य का मध्यमान = २ ५७ तथा धार्मिक मूल्य का मध्यमान १.५० है। कक्षा ८ की बालिकाओ मे देशभक्ति मूल्य का मध्यमान ५.८१, सामाजिक मूल्य का मध्यमान २.५२ तथा धार्मिक मूल्य का मध्यमान १ ८५ गणना से ज्ञात हुए। कक्षा ६ की बालिकाओ मे भी यही क्रम है। पहले देशभक्ति मूल्य, फिर सामाजिक मूल्य तथा धार्मिक मूल्य के मध्यमान है।

परिकल्पना का परीक्षण टी–परीक्षण द्वारा किया गया । सयुक्त मानक त्रुटि तथा टी के मान तालिका–३ मे दिये गये है ।

तालिका ३

मूल्य	सयुक्त मानक त्रुटि			टी–मान		
	कक्षा ८व७	कक्षा ८व६	कक्षा ७व६	कक्षा ८व७	कक्षा ८व६	कक्षा ७ व ६
१. देशभक्ति	० २८	०.२५	० २७	३ ६४	० ५२	४ २६
२ मामाजिक	० ७९	०.२६	० २८	०.७२	० ६९	० ७१
३. धार्मिक	० २५	० २३	०.२५	०.२०	० २६	० ०४

तुलनात्मक विश्लेपण में केवल देशभक्ति के मूल्य के परिणाम अन्य मूल्यो से भिन्न है। कक्षा ७ व ६ के मध्य टी –का मान ४.२६ तथा कक्षा ८ व ७ के मध्य ३ ६४ गणना से ज्ञात हुआ, जो कि सांख्यिकीय दृष्टि से ०.०१ स्तर पर मार्थक रूप से मान्य है । दोनो ही परिणाम कक्षा ७ के पक्ष मे गये है । अत परिकल्पना 'विभिन्न कक्षाओं की बालिकाओ मे कोई मूल्य भिन्नता नही है ।' अस्वीकृत होती है । देशभक्ति मूल्य सबसे अधिक कक्षा ७ की बालिकाओ मे पाया जाता है । टी–परीक्षणों के अन्य मान साख्यिकीय दृष्टि से अन्तरहीन हैं ।

निष्कर्ष

खेल मे उच्चस्तरीय रुचि वाली प्रान्तीय स्तर पर चुनी गई सरस्वती विद्या मंदिरो की बालिकाओ मे देशभक्ति मूल्य उच्च स्तर पर पाया गया है । तत्पश्चात् सामाजिक एव धार्मिक मूल्य का स्थान ज्ञात हुआ । सांख्यिकीय स्तरपर यह भिन्नता देशभक्तिमूल्य की अन्य मूल्यों से है । सामाजिक तथा धार्मिक मूल्यो में आपस मे भी सार्थक अन्तर है । धार्मिक मूल्य की अपेक्षा सामाजिक मूल्य अधिक पाया गया है ।

कक्षा ६, ७ व ८ की बालिकाओ द्वारा व्यक्त अनुक्रियाओ का तुलनात्मक अध्ययन टी–परीक्षण द्वारा किया गया । कक्षा ७ की बालिकाओ मे सबसे अधिक देशभक्ति पाई गयी । इसके बाद कक्षा ८ तथा कक्षा ६ का स्थान रहा । सामाजिक मूल्य भी सबसे अधिक कक्षा ७ की बालिकाओ मे पाया गया । कक्षा ८ व ६ का स्थान क्रमश. है । धार्मिक मूल्य सबसे अधिक कक्षा ६ की बालिकाओ मे पाया गया । तत्पश्चात् कक्षा ८ व ७ की बालिकाओ का स्थान ज्ञात हुआ । सांख्यिकीय दृष्टि से सार्थक भिन्नता केवल देशभक्ति मूल्य के लिये ही पायी गयी ।

बालिकाओं में पाया गया उपरोक्त मूल्यों का क्रम यह प्रदर्शित करता है कि सरस्वती विद्या मंदिरों में शिक्षा देने के साथ-साथ देशभक्ति को विशेष महत्व दिया जाता है। सम्भवत: इसीलिये अलग-अलग कक्षाओं के विवेचन में भी यही क्रम एवं अनुक्रियाएँ पाई गयी है।

शैक्षिक विवेचन

शिक्षा की दृष्टि से इस लघु शोध का विशेष महत्त्व है। देशभक्ति मूल्य की अधिकता निश्चय ही बालिकाओं में खेल के प्रति अधिक रुचि उत्पन्न करेगी। वे अधिक लगन से अभ्यास करेंगी। भविष्य में देश का नाम भी इन बालिकाओं द्वारा ऊँचा होगा। इसमें कोई अतिशयोक्ति नहीं है। इस शोध का एक महत्त्व यह भी है कि ऐसी बालिकाओं का जो खेल में अधिक रुचि रखती है और देशभक्ति की भावना भी उनमें कूट-कूट कर भरी है, विशिष्ट खेल, जिसमें उनकी रुचि है, का अतिरिक्त प्रशिक्षण दिया जाना चाहिए। यह न्यादर्श छोटा है। यदि विद्या मंदिरों के साथ-साथ अन्य विद्यालयों का भी विस्तृत अध्ययन किया जाये तो यह समाज के लिये अधिक उपयोगी सिद्ध हो सकेगा।

ABSTRACT

The present study was done to investigate the value-pattern of female students studying in Saraswati Vidya Mandirs Sample was taken of 184 girls selected from class VI, VII and VIII for Uttar Pradesh level games competition 1993

The finding of the study revealed that in general the students have given first preference to value of patriotism The second and third preferences were given social and spritual values respectively. Classwise analyses were also shown the same value-pattern.

सम्पादकीय

सम्यक् मूल्यांकन

शिक्षा की प्रक्रिया मे उद्देश्य-निर्धारण के साथ-साथ उसकी प्राप्ति के उपाय के अतर्गत पाठ्यक्रम और पाठन-विधि प्रमुख है। जब छात्रो को किसी पाठ्यक्रम के आधार पर शिक्षा दी जाती है, तब पाठ्यक्रम की अवधि पूरी हो जाने पर परीक्षा ली जाती है। परीक्षा द्वारा यह मालूम किया जाता है कि जो कुछ छात्रो को पढाया गया है, वह किस सीमा तक उनके द्वारा अपनाया गया है। दूसरे शब्दो में, परीक्षा द्वारा छात्रो की स्मृति की परीक्षा होती है। छात्रों ने पाठ्यवस्तु को कितना याद रखा है, यही प्रचलित परीक्षा-प्रणाली का प्रमुख बिन्दु है।

लेकिन मूल्याकन परीक्षा में निहित कमियो को दूर करने का प्रयास करता है। यदि पाठ्यक्रम का निर्माण छात्रो की मनोवैज्ञानिक आवश्यकताओं और रुचियो का ध्यान मे रखकर इस उद्देश्य से किया गया है कि छात्रो का सर्वांगीण विकास हो, वे समाज और देश के विकास मे सहायक हों, तो मूल्यांकन की आवश्यकता होगी। मूल्याकन करते समय किसी स्तर की शिक्षा के उद्देश्य, पाठ्यक्रम, पाठन-विधि, छात्रो की अभिरुचि, शिक्षक की योग्यता और शिक्षण-कौशल आदि को ध्यान मे रखना आवश्यक है। जहाँ परीक्षा द्वारा हमें किसी छात्र की स्मरण-शक्ति का ज्ञान होता है, वही मूल्यांकन करके हम यह जानने का प्रयास करते है कि किसी छात्र ने किस सीमा तक निर्धारित उद्देश्यों की पूर्ति की। दूसरे शब्दो में, जो शिक्षा के उद्देश्य (मूल्य) निर्धारित किये गये थे, उनका अकन (जाँच) करके उन कारकों के विषय मे जानकारी प्राप्त की जाती है जो छात्र के ज्ञानात्मक, भावात्मक क्रियात्मक और नैतिक विकास मे सहायक या बाधक हुए है।

इस प्रकार मूल्याकन शैक्षिक प्रक्रिया का एक अभिन्न अग है। शिक्षा के उद्देश्यों से आरम्भ होकर पाठ्यक्रम के माध्यम से जो छात्रो की उपलब्धि होती है, उसका मूल्यांकन

किये बिना हम प्रगति अथवा शैक्षिक विकास का अनुमान नही लगा पाते । इस संदर्भ मे मूल्याकन के उपकरणो का उल्लेख अपेक्षित है । प्राय· मूल्याकन मे निम्नलिखित उपकरणों का उपयोग किया जाता है—

१ पर्यवेक्षण (Observation)

२ साक्षात्कार (Interview)

३ चेक लिस्ट

४ रेटिंग स्केल

५ प्रश्नावली

६. मनोवैज्ञानिक परीक्षण

७ केस स्टडी (व्यक्ति अध्ययन)

व्यक्ति अध्ययन (केस स्टडी)

सम्यक् मूल्याकन के लिए केस स्टडी सबसे अधिक उपयोगी है । इसका कारण यह है कि प्रत्येक व्यक्ति अथवा छात्र अपने आप में एक ऐसी इकाई है जो अनन्य (Unique) है । उसकी अपनी क्षमताये, योग्यताएँ, मानसिक, बुद्धिलब्धि, रुचियाँ, मूल्य, विचार-व्यवहार आदि है । इस प्रकार उसका सम्यक् मूल्याकन उसी समय हो सकता है जब उसकी क्षमताओं के संदर्भ में उसका मूल्याकन किया जाय । दूसरे शब्दों मे, सम्यक् मूल्यांकन द्वारा यह ज्ञात होता है कि क्या कोई छात्र उस सीमा तक प्रगति कर रहा है जितनी कि उसकी क्षमता (Potentiality) है । इस दृष्टि से यह परम आवश्यक है कि विद्यालय मे प्रत्येक छात्र का सचयी अभिलेख रखा जाय । इस अभिलेख मे उसका सम्पूर्ण विवरण अंकित हो जो व्यक्ति अध्ययन (केस स्टडी) की दृष्टि से आवश्यक है । इस अभिलेख की सहायता से हम किसी छात्र के विकास का स्तर निर्धारित कर सकते हैं और फिर एक निश्चित अवधि के बाद मूल्याकन द्वारा यह ज्ञात किया जा सकता है कि वह अपने स्तर से ऊपर उठा या नही । यदि उठा है तो वे कौन से कारक है जो सहायक सिद्ध हुए है । यदि नही उठा तो इसके कौन से कारण है ? मूल्याकन का केवल इतना कार्य है कि वह छात्र की उन्नति, अथवा अवनति बता दे । लेकिन उन्नति अथवा अवनति के क्या कारण है, इसे जानने के लिए हमे अनुसधान की आवश्यकता होगी ।

इस प्रकार यह स्पष्ट है कि सम्यक् मूल्याकन के लिए प्रत्येक छात्र का सचयी अभिलेख हो, फिर केस स्टडी के द्वारा उसके बारे में पूरी जानकारी प्राप्त की जाय । इसके पश्चात् उसके सर्वांगीण विकास को ध्यान मे रखते हुए उस स्तर को निश्चित किया जाय, जिसके आधार पर सम्यक् मूल्याकन करना है । निर्धारित स्तर के सदर्भ में छात्र की उपलब्धियों का मूल्याकन किया जाय । मूल्याकन से जो परिणाम प्राप्त हो, उनका

विश्लेषण करके उन कारणों पर प्रकाश डाला जाय जो किसी छात्र के सर्वांगीण विकास मे सहायक अथवा बाधक होते है। इस प्रकार मूल्यांकन का यह पक्ष अनुसधान के बिना अधूरा है। अत. सम्यक् मूल्यांकन के लिए अनुसधान भी आवश्यक है।

सीताराम जायसवाल

ABSTRACT

The integral approach to evaluation requires that cumulative record of every student should be maintained so that material for ease-study could be available. Thus it will be possible to determine the level of the all aspects of his growth and development. The result of evaluation should be analised for further improvement through educational research.

—S. R J.

★

जिस प्रकार जल मे तेल की बूद फैल जाती है, उसी प्रकार उस व्यक्ति की बुद्धि एव अनुभव भी विकसित होते है, जो विविध देशो में भ्रमण करता है, तथा पडितो की सगति में रहता है।

(सूक्ति–कुसुमाजलि)

जीना भी लेकिन कला है

जीवन तो जीना ही होगा, जीना भी लेकिन कला है।
चाहो तो सीखो और जी लो, वर्ना ये सर की बला है ।। ···जीना०

खुशियों को पैसे से नापो न, पैसे से मस्ती को बाधो न।
दुख में अभावो में, कष्टों की राहों मे मुस्काते रहना भला है।' ···जीना०

कुर्सी से इज्जत को आंको न, महलो की दौलत झाको न।
जितना भी जोडा यही पे छोड़ा, बता साथ क्या कुछ चला है ।। ···जीना०

अपने लिये सब है जीते, इसमे नही कुछ बडाई।
कभी काम आ रहे दूसरो के इसी से अमर भलाई ।।
सुख से न सोया जो, पर दुख मे रोया। वो मिट कर भी फूला फला है ।। ···जीना०

सबको सहारा दो मुश्किल मे, अपनाओ प्यार भरो हर दिल मे
बीत समय जायेगा, याद मगर आयेगा, मिल जुल के जो भी चला है ।। ···जीना०

सकट तो आते रहेगे-इनसे न कोई बचा है।
हर कामयाबी का किस्सा कुर्बानियों ने रचा है ।।
तप कर अंगारो मे, पिट कर प्रहारों में सोना बन कुदन ढला है ।। ···जीना०

भरत राज पाकर दुखी थे, प्रभु राम बन मे सुखी थे।
ये सुख दुख की माया, समझ कौन पाया—ये मानव उसी मे पला है ।। ···जीना०

शहीदो ने जीवन लुटाये, ये दिन आज हम देख पाये।
बीज मिट्टी मे मिलता, तभी फूल खिलता—
चलाना यही सिलसिला है ।। ···जीना०

तू अपनी ही मस्ती मे गाता चल-
तू हर हाल मे मुस्काता चल,
कहे सब दिवाना, तू दिल पर न लाना
तू दुनिया से हट कर चला है ।। ···जीना०

मंजिल तो पानी ही होगी, वर्ना अधूरी कहानी।
हँस कर सफर को गुजारो, समझो सफल जिन्दगानी-
सदा हँस के बोलो, और मिश्री सी घोलो।
इसी मे सभी का भला है ।। ···जीना०

अगर चाहते सुख से जीना, बहाना पड़ेगा पसीना।
कर्म ही धर्म है—इसमे क्या शर्म है की जो मेहनत तो फल भी मिला है ।।···जीना०

— शांतिदेव, बम्बई

अनुसूचित जाति के विद्यार्थियों में आत्मविश्वास तथा प्रदत्त गृहकार्य से सम्बन्धित समस्याएँ

भूमिका

हमारे देश की जनसख्या में अधिकाश अनुसूचित जाति, जनजाति तथा पिछड़े, कमजोर वर्ग के लोग है। कुछ समय से सरकार ने इस वर्ग को अन्य वर्ग की अपेक्षा सामाजिक, आर्थिक एव शिक्षा के क्षेत्रो मे अत्यधिक सहायता प्रदान की है। हम देखते हैं कि अन्य क्षेत्रो के साथ सरकार शिक्षा क्षेत्र के अन्तर्गत प्राथमिक स्तर से लेकर उच्च शिक्षा तक स्कॉलरशिप, होस्टल-सुविधा तथा इसी वर्ग को नौकरियों आदि मे आरक्षण भी प्राप्त है। किन्तु आज इस वर्ग के छात्र वहाँ नही पहुँचे हैं जहाँ सामान्य वर्ग के छात्र है। देखने पर तो कई कारण हमें मिल सकते है, लेकिन उन कारणो के मूल मे भी कई कारण निहित हैं जैसे—मानसिक द्वन्द्व, अध्ययन सम्बन्धी आदते, शिक्षा के प्रति मनोवृत्ति, प्रदत्त गृहकार्य, परीक्षा, आत्मविश्वास आदि से सम्बन्धित समस्याएँ। ये विभिन्न समस्याएँ इस वर्ग के शैक्षिक स्तर को प्रभावित करती है जिसके फलस्वरूप यह वर्ग अन्य वर्गों की अपेक्षा शिक्षा के क्षेत्र मे पिछडा जाना जाता है। इन्ही सभी बातो पर विचार करते हुए शोध के उपरोक्त विषय को अध्ययन हेतु चुना गया है।

वैसे भी एम० बी० बुच, सर्वे ऑफ रिसर्च इन एजूकेशन भाग एक से तीन तक के कुछ शोधकार्य के परिणाम यह बताते है कि अनुसूचित जाति के विद्यार्थियो की अध्ययन सम्बन्धी आदतो एवं मनोवृत्तियो तथा उपलब्धियो मे एक धनात्मक और सार्थक सम्बन्ध पाया गया है। इस परिणाम का समर्थन नारायण, सुधा (१९६९), कोईनो, एनीपलक (१९८२), कापुस्ता, रिक्कीली (१९८०), दत्ता, रमा (१९६९) के शोध कार्य करते है।

कु० सुषमा शाह (शोधछात्रा), शिक्षा सस्थान देवी अहिल्या विश्वविद्यालय, इन्दौर।

अग्रवर्ती सगठक तथा पाठन सम्बन्धी आदतो से जुड़े अध्ययनो से पता चलता है कि इनमे से एक दो को छोड़कर कोई भी अध्ययन अनुसूचित जाति के विद्यार्थियो की शैक्षिक समस्याओ आदि को ध्यान मे रखकर नही किया गया। अत प्रस्तुत अध्ययन मे विशेष रूप से अनुसूचित जाति के विद्यार्थियो की परीक्षा, आत्मविश्वास तथा प्रदत्त गृह कार्य से सम्बन्धित समस्याओ को ज्ञात करने का प्रयास किया गया है।

पारिभाषिक शब्द

१ **अनुसूचित जाति** —भारत तथा मध्यप्रदेश सरकार द्वारा निर्धारित की गई जातियों मे नामाकित करते हुए एक जाति का नाम।

२ **विद्यार्थी** —पढने वाले विभिन्न उम्र के लडके-लडकियाँ।

३ **शैक्षिक उपलब्धि** —शिक्षा सम्बन्धी जैसे कोई कक्षा उत्तीर्ण करना। प्रस्तुत शोध में पूर्व कक्षा (१०वीं कक्षा) उत्तीर्ण के अको को छात्र की शैक्षिक उपलब्धि माना गया था।

४ **अध्ययन सम्बन्धी आदतें** —विद्यार्थी किस प्रकार पढते या अध्ययन करते है, जैसे—किसी-किसी छात्र को रेडियो सुनते हुए अध्ययन करने मे आनन्द आता है तो उसकी याददाश्त पर इस आदत का क्या प्रभाव होता है।

५ **मनोवृत्तियाँ (अभिवृत्ति)** —ट्रैवर्स के अनुसार "व्यवहार को कोई एक दिशा प्रदान करने वाली प्रतिक्रिया के लिए आवश्यक तत्परता का नाम अभिवृत्ति है।" फलस्वरूप कह सकते है कि मनोवृत्ति व्यवहार को दिशा प्रदान करने वाली वह अर्जित प्रवृत्ति है जो व्यक्ति को किसी विशेष वस्तु या वस्तुओ के प्रति एक निश्चित प्रकार का व्यवहार करने के लिए तत्पर करती है, बशर्ते कि वातावरणजन्य परिस्थितियो मे कोई प्रतिकूल परिवर्तन न हो।

अध्ययन के उद्देश्य

१ अनुसूचित जाति के विद्यार्थियो की प्रदत्त गृहकार्य से सम्बन्धित समस्याएँ ज्ञात करना।

२. अनुसूचित जाति के विद्यार्थियो की आत्मविश्वास से सम्बन्धित समस्याएँ ज्ञात करना।

३ अनुसूचित जाति के विद्यार्थियो की परीक्षा से सम्बन्धित समस्याएँ ज्ञात करना।

शून्य परिकल्पना

१. अनुसूचित जाति के विद्यार्थियों की प्रदत्त गृहकार्य से सम्बन्धित समस्याएँ नही होती है।

२. अनुसूचित जाति के विद्यार्थियों की आत्मविश्वास से सम्बन्धित समस्याए नही होती है।

३ अनुसूचित जाति के विद्यार्थियों की परीक्षा से सम्बन्धित समस्याएँ नही होती है।

अध्ययन विधि

प्रस्तुत अध्ययन के लिए सर्वेक्षण शोध विधि का चयन किया गया। इसके अन्तर्गत उच्चतर माध्यमिक विद्यालयों मे अध्ययनरत ११वीं कक्षा के अनुसूचित जाति के विद्यार्थियों को चुना गया। अध्ययन हेतु यादृच्छिक न्यादर्श पद्धति का उपयोग करते हुए विज्ञान तथा कला समूह के कुल १६७ विद्यार्थियों का चयन न्यादर्श हेतु किया गया। परिणाम ज्ञात करने हेतु विद्यार्थियों की शैक्षिक उपलब्धि कक्षा १०वी के परिणामो के आधार पर उच्च तथा निम्न समूह मे बाँटा गया। प्रदत्तों के साख्यिकीय विश्लेपण हेतु "प्रतिशत" के माध्यम से परिणाम ज्ञात किये गये है। जिसका सक्षिप्त अवलोकन आगे दी गई सारिणी क्रमाक १, २, ३ मे किया जा सकता है।

अध्ययन उपकरण

शोध अध्ययन हेतु समंको (प्रदत्तो) के एकत्रीकरण के लिए डॉ० सी० पी० माथुर द्वारा निर्मित "अध्ययन सम्बन्धी आदतों एव मनोवृत्तियों का परीक्षण" नामक एक ही उपकरण प्रयुक्त किया गया।

सारिणी क्रमाक १
प्रदत्त गृहकार्य

पद क्रमाक	समस्याएँ	कुल प्रतिशत	समूह प्रतिशत	
			कला समूह	विज्ञान समूह
१४	मै अपना गृह कार्य समय से पहले करना पसद करता/करती हूँ।	१३.७७	१०.३४	१७.५
२३.	मै अपना गृहकार्य विद्यालय से घर पहुँचते ही पूरा कर लेता/लेती हूँ।	१९ ७६	२१.८३	१७ ५
४२	मै सभी विषयो में दिए गए गृहकार्य को उसी दिन पूरा कर लेता/लेती हूँ।	८.९८	१२ ६४	५ ००
५४	मै दिए गए गृहकार्य को उसी समय पूरा करता/करती हूँ जबकि मुझे किसी प्रकार का भय दिलाया जाए।	२७ ५४	२७.५८	२७.५

सारिणी क्रमांक २
आत्मविश्वास

पद क्रमाक	समस्याएँ	कुल प्रतिशत	समूह प्रतिशत	
			कला समूह	विज्ञान समूह
३.	जब भी मुझे अध्ययन मे कोई शका होती है अथवा कोई अड़चन आती है तो मै बिना यह विचारे कि दूसरे छात्र या अध्यापक मेरे बारे मे क्या सोचेंगे, अध्यापक से पूछ लेता/लेती हूँ।	१६ १६	२० ६८	११ २५
२९	मैं कोई विषय वस्तु समझ मे नही आने पर भी अध्यापक से नही पूछता/पूछती क्योकि मुझे झिझक-सी महसूस होती है।	१२ ५७	९ १९	१६.२५
४८	मै कक्षा मे अपनी समझ से सही व उचित राय करने मे कभी भी नही हिचकिचाता/हिचकिचाती हूँ।	३३ ५३	३३ ३३	३३.७५

सारिणी क्रमांक ३
परीक्षा

पद क्रमाक	समस्याएँ	कुल प्रतिशत	समूह प्रतिशत	
			कला समूह	विज्ञान समूह
१०	मेरे विचार मे परीक्षा मे उत्तर सुलेख मे लिखने पर अच्छे अक प्राप्त होते है।	१० १७		
२७	मुझे पढ़ते समय सुस्ती आ जाती है।	२५ ७४	२७.५८	२३.७५
३१	यद्यपि मै परीक्षा में अतिम क्षण तक लिखता/लिखती रहती हूँ फिर भी क्योंकि मेरी लिखने की गति धीमी है, इस कारण मै निर्धारित समय मे पूछे गये सभी प्रश्नों के उत्तर नही दे पाता/पाती हूँ।	४३ ७१	५२.८७	३३.७५

३७	मै किसी भी विषय को घटे आधे घटे मे अधिक एकाग्रचित्त होकर नही पढ सकता/सकती हूँ ।	५६.२८	५५.१७	५७ ५
५६	मेरे विचार में परीक्षा मे अपने विचारको को स्पष्ट रूप से व्यक्त न कर सकना तथा उन विचारों को सुचारु रूप से न लिख सकने के कारण ही मुझे परीक्षा मे अच्छे अक प्राप्त नही होते है ।	३९ ५२	४१ ३७	३७.७
५७	श्रुतिलेख, कक्षा कार्य, गृहकार्य तथा परीक्षा में अक्सर स्वच्छता का ध्यान नही रख पाता/पाती हूँ ।	३४.७३	३९ ०८	३० ००
५९	मै केवल परीक्षा मे उत्तीर्ण होने के दृष्टिकोण से ही अध्ययन करता/करती हूँ ।	६१ ६७	५८ ६२	६५ ००
६०	परीक्षा मे उत्तरपुस्तिका वापस लौटाने से पूर्व मै उसे एक बार फिर से जाँच नही पाता/पाती हूँ, क्योकि इस कार्य के लिए मेरे पास समय नही बचता।	३८ ९२	३५ ६३	४२ ५

परिणामों की विवेचना

सारिणी क्रमाक एक (१) को देखने से यह स्पष्ट होता है कि अनुसूचित जाति के विद्यार्थियो की प्रदत्त गृहकार्य से सम्बन्धित समस्याएँ पद क्रमाक ५४ मे अधिक है, जिसका कुल प्रतिशत २७.५४ है तथा कला और विज्ञान समूह का क्रमश. २७.५८, २७ ५ प्रतिशत है। इससे यह स्पष्ट होता है कि अनुसूचित जाति के विद्यार्थियो की प्रदत्त गृहकार्य से सम्बन्धित मुख्य समस्या दिए गए गृहकार्य को उसी समय पूरा करना है, जबकि कोई भय दिखाया जाए । इसके अतिरिक्त गृहकार्य घर पहुँचते ही पूरा कर लेना तथा गृहकार्य समय से पहले करना पसंद है। अत इस सन्दर्भ मे प्रथम शून्य परिकल्पना अस्वीकार की जाती है।

इसी प्रकार सारिणी क्रमाक दो (२) को देखने से यह स्पष्ट होता है कि अनुसूचित जाति के विद्यार्थियों की आत्मविश्वास से सम्बन्धित समस्या मुख्य रूप से पद क्रमाक २९ मे अधिक है जिसका कुल प्रतिशत ३३.५३ है तथा कला और विज्ञान का क्रमश ३३.३३, ३३.७५ है जो दर्शाता है कि अनुसूचित जाति के विद्यार्थियो की आत्मविश्वास से

सम्बन्धित समस्या अध्यापक से विषयवस्तु पूछने मे झिझक महसूस करना है। अत: इस सन्दर्भ मे द्वितीय शून्य परिकल्पना अस्वीकार की जाती है।

सारिणी क्रमाक तीन (३) को देखने से स्पष्ट होता है कि अनुसूचित जाति के विद्यार्थियो की परीक्षा से सम्बन्धित समस्याएँ पद क्रमाक ५९, ३७ मे अधिक है जिसका कुल प्रतिशत क्रमश ५८.६३, ५५ १७ है और विज्ञान समूह का प्रतिशत क्रमश ६५, ५७ ५ है जो कि यह दर्शाता है कि अनुसूचित जाति के विद्यार्थियों की परीक्षा से सम्बन्धित मुख्य समस्याएँ केवल परीक्षा में उत्तीर्ण होने का दष्टिकोण किसी भी विषय को अधिक समय तक एकाग्रचित्त न होकर पढना तथा लेखन की कम गति है। अत इस सन्दर्भ में तृतीय शून्य परिकल्पना अस्वीकार की जाती है।

निष्कर्ष

प्रस्तुत शोध अध्ययन से स्पष्ट होता है कि अनुसूचित जाति के विद्यार्थियो की प्रदत्त गृहकार्य, परीक्षा तथा आत्मविश्वास से सम्बन्धित समस्याएँ होती है जो विद्यार्थियो की शैक्षिक उपलब्धि को प्रभावित करती है।

सन्दर्भ ग्रंथ सूचा

१. जायसवाल, सीताराम . शिक्षा मनोविज्ञान, प्रकाशन केन्द्र, न्यू बिल्डिंग्स, अमीनाबाद, लखनऊ, १९७०

२. सुखिया, एस० पी० शैक्षिक अनुसधान के मूलतत्त्व, विनोद पुस्तक मन्दिर, आगरा—२, १९७२

३ गैरेट, हेनरी शिक्षा एव मनोविज्ञान मे साख्यिकी, कल्याणी पब्लिशर्स, लुधियाना, १९८२

४ माथुर, एस० एस० शिक्षा मनोविज्ञान, विनोद पुस्तक मंदिर, आगरा–२, १९७३

५ राय, पारसनाथ अनुसधान परिचय, लक्ष्मीनारायण अग्रवाल, हॉस्पिटल रोड, आगरा–३, १९७३

६ बुच, एम० बी० सर्वे ऑफ रिसर्च इन एजूकेशन (भाग १ से ३ तक)

SUMMARY

Title

A study of the problems related to the self-confidence, examination and home work of schedule caste students.

The government is doing and has done, a lot to improve the educational facility for S C people. Even then there is not much improvement. This study was conducted to find out the reason for it.

Data were collected from 167 S.C. students of 11th class studying in schools of Indore city.

Through the tool "अध्ययन सम्बन्धी आदतों एवं मनोवृत्तियों का परीक्षण" developed by Dr. C. P. Mathur data were analyzed with the help of percentage The result was that there are problems related to the examination, self-confidence and home work of S. C. students, which affect their educational achievement

—**(Miss) Sushma Shah**

★

सभी से सत्य बात कहनी चाहिए। गुप्त बातें, छिपाने, या झूठ व्यवहार का मतलब है चोरी करना। इससे मन कलुषित होता है, दुःख के सागर में गोता लगाना पड़ता है। सत्यबद्ध और पवित्र जीवन आनन्द और परम सुख के अनुकूल है।

—**श्री श्रीमां आनन्दमयी**

श्रद्धांजलि– स्व० नारायणदास

एक ज्योतिपुंज का अवसान

गत ८ जून को राष्ट्रीय स्वयसेवक सघ के वरिष्ठ प्रचारक श्री नारायणदास का निधन हो गया। वे ७३ वर्ष के थे। गत ४ महीनो से वे पीठ के दर्द का अनुभव कर रहे थे। चिकित्सकीय परीक्षण के वाद पता चला कि उनकी रीढ की हड्डी का कुछ भाग गल गया था। पत्पश्चात् उन्हे २ फरवरी को चण्डीगढ के पी०जी०आई० अस्पताल मे भर्ती कराया गया। सफल आपरेशन के वाद उन्हें एक महीने के भीतर अस्पताल से छुट्टी दे दी गई थी। लेकिन ८ जून को फिर से स्वास्थ्य बिगड़ जाने के कारण उन्हे पुन: चण्डीगढ के पी०जी०आई० अस्पताल मे भर्ती कराया गया जहां ८ जून को उनका अवसान हो गया।

स्व० नारायणदास, विद्या भारती के सहमत्री तथा उत्तर क्षेत्र के सगठन मत्री थे। वे पंजाब पचनन्द शोध सस्थान के सस्थापक एव सरक्षक भी रहे थे। वे चण्डीगढ, पजाब, हरियाणा, हिमाचल प्रदेश तथा जम्मू-कश्मीर मे रा०स्व० सघ के प्रान्त प्रचारक तथा अ०भा० शारीरिक प्रमुख भी रहे।

१३ अप्रैल, १९२२ तदनुसार १ वैशाख, सम्वत् १९७९ को उनका जन्म डेरा इस्माईल खान (अब पाकिस्तान में) मे हुआ था। वही श्री जयगोपाल (रा०स्व० सघ के क्षेत्रीय प्रचारक) के साथ ७वी कक्षा से लेकर १०वी तक एक साथ पडे।

१९३५ मे संघ शिक्षा वर्ग (प्रथम वर्ष) का प्रशिक्षण लिया। तत्पश्चात् १९४२ मे लाहौर से वी०एस-सी० उपाधि प्राप्त कर सघ के प्रचारक का जीवन प्रारम्भ किया। लाहौर सघ शिक्षा वर्ग मे श्री नारायण दास ने डा० हेडगेवार तथा श्री गुरुजी से प्रेरणा प्राप्त की। आज उनकी प्रेरणा से अनेक प्रचारक देशभर मे राष्ट्रीय पुनर्निर्माण के लिए अपनी सेवाएँ अर्पित कर रहे है।

(पाञ्चजन्य से साभार)

आर० पी० पांडेय एवं

सुमन कनौजिया

बुन्देलखण्ड प्रक्षेत्र के जनजातीय समूहों की शैक्षिक अभिवृत्ति

मानव समाज का उपेक्षित, अनुसूचित और पिछडा समूह आज "जनजाति" के रूप मे जाना जाता है। मानव शास्त्र में इसे कबीला, जाति, वर्ग, जनजाति तथा प्रजाति आदि रूपों मे अध्ययन किया जाता है। भारत देश मे सामाजिक गतिशीलता का स्वरूप धीमा एव सतुलित रहा है; इसीलिये सामाजिक स्तरीकरण की व्यवस्था मुख्यरूप से जाति तथा वर्ग पर निर्भर करती है। "जनजाति समूह" स्तरीकरण की व्यवस्था की ही एक श्रेणी है; जिसकी उत्पत्ति या विकास मानवीय दृष्टिकोण और समूह की क्रियाशीलता पर निर्भर होती है। मानव शास्त्रियों के अध्ययन रसल व हीरालाल (१९१६); नाडेल (१९५३); मजूमदार (१९६५); सिन्हा (१९६८); क्रुक (१९७५) आदि ने जनजाति समूहों की विशेषताओं में सामान्य क्षेत्र, सामान्य प्रशासन, तथा विशिष्ट सस्कृति आदि को माना है।

प्रस्तुत अध्ययन बुन्देलखण्ड प्रक्षेत्र मे व्याप्त जनजातीय समूहो की शैक्षिक अभिवृत्ति तक ही सीमित है। जिला गजट, झासी मे वर्णित जनजातीय समूहो मे से अध्ययनकर्त्ता ने सिर्फ तीन जनजातीय समूहो को ही अपने अध्ययन हेतु चुना है। घुमक्कड (नोमेडिक) जनजाति, (कबूतरा-नट), खेतिहर (एग्रीकलचरल), जनजाति (खगार), और ट्रान्जीशनल जनजाति (सहारिया) आदि जनजातीय समूहो की प्रधानता एवं प्रचुरता झासी के चारो ओर पाई जाती है। जनपद झासी के चारो ओर इनके डेरे विभिन्न ग्रामो के तहत पाये जाते है (हरिजन समाज कल्याण विभाग, झासी)।

डा० आर० पी० पाडेय, शिक्षा विभाग, बुन्देलखण्ड विश्वविद्यालय झासी एवं

कु० सुमन कनौजिया, शिक्षा विभाग, बुन्देलखण्ड विश्वविद्यालय, झासी।

आधुनिक समय मे नागरिक सम्पन्नता और विकास के अवसरो की समानता का प्रसार सरकारी तन्त्र द्वारा विभिन्न आयामों मे प्रस्तुत किया जाता रहा है, ताकि शिक्षा के द्वारा इनमे जागृति और अधिकार भाव विकसित हो सके। इन जनजातीय समूहो मे व्यवहार कुशलता लाने के लिये हमें इनके अन्दर छिपी हुई शैक्षिक अभिवृत्ति को उभारना होगा; ताकि व्यवहार के अभिप्रेरक सवाहक, और नियत्रक स्रोतो का मूल्याकन सम्भव हो सके। इस प्रकार से इन स्रोतों को जानकर इनकी शक्ति को निश्चित रूप मे और सही दिशा मे जागृत एवं प्रवाहित करके सर्वांगीण विकास की ओर उन्मुख किया जा सकता है, जिससे ये लोग भी भारतीयता के परिचायक बन सके।

आज शैक्षिक अभिवृत्ति का विभिन्न रूपो मे अध्ययन किया जा चुका है, जैसे—कक्षा शिक्षण, तथा बालक शिक्षण केन्द्र, शिक्षा-प्रक्रिया, अध्यापक और प्रशिक्षणार्थी तथा व्यवसाय आदि। देश और विदेश मे हुए अध्ययन—बुन्द (१९५४), गेज (१९५५), हार्न (१९५५), रस्तोगी (१९५६), कोठारी (१९५८), पाण्डेय (१९५८), बुच (१९५९), ठक्कर (१९५९), रैयान्स (१९६०) पन्नावलम् (१९६६), विम्र (१९६६), मोसर (१९६६), सदावल (१९६८), कुप्पूस्वामी (१९६८), सिल्वरमैन (१९६९), पिजियन (१९७०), नैश (१९७२), सिह (१९७७), सतोष (१९८८) आदि है। फिर भी शैक्षिक अभिवृत्ति का जनजाति समूहो मे अध्ययन क्षेत्रीयता के आधार पर उपलब्ध नही है। इसलिए इस कार्य के सम्पादन से बुन्देलखण्ड प्रक्षेत्र के जनजातीय समूह की शैक्षिक रुझान का पता लग सकेगा ताकि उनको भारतीय सभ्य नागरिक बनाया जा सके।

अध्ययन के उद्देश्य

(१) जनपद झाँसी के जनजातीय समूहों की शैक्षिक मनोवृत्ति का अध्ययन करना।

(२) वर्तमान मे स्थापित शैक्षिक दृष्टिकोण के आधार पर उनके शैक्षिक व्यवहार को निश्चित करना।

(३) अन्य सम्बन्धित अध्ययन।

अध्ययन प्राविधि

(अ) न्यादर्श—झासी जनपद मे फैली हुई जनजातीय समूह नट, कबूतरा, साहरिया और खगार आदि की शैक्षिक अभिवृत्ति जानने के लिए अध्ययनकर्त्ता ने १२ गाँव (नट कबूतरा), २० गाँव (खगार) और २८ गाँव (सहारिया) आदि को अपने अध्ययन का क्षेत्र बनाया। इन मे से "दैव निदर्शन" के आधार पर २०० स्त्री-पुरुष प्रत्येक जनजाति समूह का चुनाव किया गया। न्यादर्श का स्पष्ट चुनाव जिलाधिकारी झाँसी (विकास) द्वारा सर्वेक्षण के आधार पर किया गया।

(आ) उपकरण—प्रस्तुत जनजाति समूहों की शैक्षिक मनोवृत्ति का अध्ययन करने हेतु डा० एस० एन० चोपडा द्वारा १९८२ में विकसित ए०एस०टी०ई० अनुसूची का प्रयोग किया गया है। अध्ययनकर्त्ता द्वारा प्रदत्तों की गणना "मैनुअल" के आधार पर की गई है।

परिणाम एवं विवेचना

प्रदत्तों का विश्लेषण करने के लिये अध्ययनकर्त्ता ने वर्णनात्मक सांख्यिकी का प्रयोग किया। इसके द्वारा विभिन्न जनजाति समूहों की शैक्षिक अभिवृत्ति की स्थिति स्पष्ट होती है। जनपद झाँसी के कबूतरा पुरुष वर्ग की शैक्षिक अभिवृत्ति का मध्यमान (१३० ७), सहरिया का (१२७ २) और खगार का (१२९.३) प्राप्त हुआ है जबकि कबूतरा स्त्री समूह का मध्यमान (१२८.५), सहरिया (१३० ८), और खगार (१२६.२) आदि क्रमश रहा है। वर्तमान अध्ययन मे प्राप्त मध्यमान के अन्तर्गत दोनो वर्गों की विषमता को इस सामाजिक सगठन के समाज के आर्थिक एवं समाज सास्कृतिक कारणो की परिधि मे विषयक दृष्टि से उचित माना जा सकता है।

तथ्य विश्लेषण मे स्पष्ट होता है कि तीनो ही जनजाति समूह (नट, कबूतरा, साहरिया और खगार) आदि की शैक्षिक अभिवृत्ति का विवरण समानता लिये हुये है। पुरुष वर्ग अपने बच्चो की शिक्षा के लिये अधिक चिन्तित प्रतीत होता है, अपेक्षाकृत किसी समूह के। नट-कबूतरा जनजाति समूह पुरुष वर्ग की शैक्षित अभिवृत्ति का मध्यमान (१३० ७) अधिक प्रभावशाली रहा है, स्त्री वर्ग मध्यमान (१२८.५) है। इससे स्पष्ट होता है कि इस समूह मे परिवार की स्थिरता, देखभाल, एव सचालन के प्रति पुरुष की भूमिका प्रमुख रहती है। उसके द्वारा लिये गये निर्णय ही सर्वोपरि होते है। फिर प्रश्न उठता है कि उनमे साक्षरता का अभाव क्यो है ? इसका मुख्य कारण "अपराध प्रवृत्ति" और "अवहेलना" मात्र हो सकती है। ये अपने समूह को अविधिक शिक्षा के द्वारा तैयार करते है ताकि वर्तमान के लाभ से सभी लाभान्वित हो सके। ये लोग वर्तमान शिक्षा को समय की बर्बादी मानते है, न कि धन अर्जन का कौशल। शैक्षिक अभिवृत्ति अनुसूची से स्पष्ट होता है कि ये लोग शिक्षा के प्रति सकारात्मक भाव रखते है। अत शिक्षा को व्यवसायपरक होना चाहिए, न कि बेरोजगारीपरक। अत इनका जीवन आर्थिक लाभ पर निर्भर रहता है और वैसी ही शिक्षा की इनको आवश्यकता है।

सहारिया समूह की शैक्षिक अभिवृत्ति पुरुष वर्ग का मध्यमान (१२७.२) और स्त्री वर्ग का (१३० ८) रहा है। इससे शिक्षा के प्रति स्त्री समूह का रुझान अधिक प्रतीत होता है। इस समाज मे स्त्री की प्रमुखता पुरुष से अधिक है। कोई भी व्यक्ति एक पत्नी के रहते दूसरी शादी या किसी स्त्री को नहीं रख सकता है। स्त्री वर्ग ही सामाजिक व्यवस्था को स्थिर बनाती है, पुरुष वर्ग सिर्फ धन अर्जन के लिये किसी न किसी प्रकार के कार्य को करता है (उ०प्र० सरकार आडि० १८, १९८७)। ये अपनी लड़कियो को अविधिक शिक्षा

के द्वारा परिवार की एकता, सम्मान और कम धन मे आवश्यकताओ को पूरा करना सिखाती है। शिक्षा के बारे मे दोनो की समान राय प्रतीत होती है, अन्तर सिर्फ शिक्षा को प्रारम्भ करने, साधन जुटाने और शैक्षिक वातावरण तैयार करने का है। अध्ययनकर्त्ता ने तथ्य संकलन के समय शिक्षा के प्रति उनकी सकारात्मक भावना उल्लास और रुचि की स्पष्ट ने झलक इनके चेहरो को मजबूत किया है।

वर्तमान शोध अध्ययन के अन्तर्गत खगार समूह पुरुष वर्ग की शैक्षिक अभिवृत्ति का मध्यमान (१२९ २) और स्त्री वर्ग का (१२९ २) रहा है। इससे स्पष्ट होता है कि पुरुष वर्ग स्त्री वर्ग शिक्षा के प्रति समान रूप से जागरूक प्रतीत होता है। इसका मुख्य कारण इस समूह का कृषि कार्य मे सलग्न होना है (विद्यार्थी १९७५)। देश मे कृषि का वैज्ञानिक विकास किया जा रहा है। कृषि शिक्षा गॉव-गॉव मे विकास खण्डो के द्वारा दी जा रही है। अत इनके मन मे अपने बच्चो के प्रति शिक्षा का भाव जागृत हो रहा है ताकि वे नई तकनीक को पढकर, समझकर कृषि मे लागू कर सके। इस प्रकार से भौतिक सम्पन्नता भी प्राप्त होगी और वे राष्ट्र के अच्छे नागरिक भी बन सकेंगे। जनजातीय समूहो की शैक्षिक अभिवृत्ति की विवेचना से स्पष्ट होता है कि उनमे सामाजिक और आर्थिक रूप से ऊँचा उठने की तीव्र आकाक्षा है। यह तभी सम्भव हो सकता है जब उनमे शिक्षा का विशेप प्रयास हो। प्रश्नो के उत्तरो से शिक्षा के प्रति सकारात्मकता उच्च स्तर पर पाई गई है। स्त्री, पुरुष दोनों की शैक्षिक अभिवृत्ति समानता लिए हुए है। अन्तर सिर्फ आन्तरिक और बाह्य परिवेशीय चिन्तन का है।

निष्कर्ष एव सुझाव

१–प्रस्तुत तीनों ही जनजाति समूहो मे शैक्षिक अभिवृत्ति की तीव्रता सामान्य रूप में पाई गई है।

२–ये लोग शिक्षा की भौतिक उपादेयता को ही मानते है जो वर्तमान में सम्भव नही हो पा रही है, अत इनमे शिक्षा का प्रसार नही है।

३–वर्तमान शोध अध्ययन मे प्रयुक्त अनुसूची के प्रति उत्तरदाताओ का रवैया सकारात्मक प्रतीत होता है। अत. सामाजिक दायित्व अपने कर्त्तव्य को क्रियान्वित करे तो शिक्षा सम्भव हो सकती है।

४–इनको व्यवसायपरक शिक्षा दी जाय जो इनके समाजगत मूल्यो पर आधारित हो जिससे ये अपनी दैनिक आवश्यकताओ को पूरा करके सभ्य नागरिक बन सके।

५–इनकी शिक्षा का आधार "प्रौढ शिक्षा" को बनाया जाय ताकि मानव जीवन और व्यवसाय की शिक्षा के द्वारा इनका आडम्बरो पर से विश्वास हटाया जा सके।

६–शिक्षा की समानता में लडका/लडकी बराबर होते है, की मानता स्पष्ट प्रतीत होती है। अत दोनो के विकास के लिए नि शुल्क एव अनिवार्य शिक्षा की व्यवस्था की जाये जो कि प्रशासन का महत्त्वपूर्ण उत्तरदायित्व है।

७–सरकार को एक "प्रतिभा चयन परीक्षा" का प्रयोग करना चाहिए ताकि प्रतिभाशाली बच्चो को छात्रावास मे रखकर शिक्षा दी जा सके।

८–"प्रौढ़ शिक्षा" के द्वारा प्रचलित सफाई-स्वास्थ्य, बीमारी, कुरीतियो और अन्य आडम्बरो के प्रति शैक्षिक तकनीकी के सकारात्मक भाव (Hardware Approach) कठोर उपागम के द्वारा विकसित कराये जाये।

९–स्त्री निरीक्षिकाओ की नियुक्ति हो जो समय-समय पर इनके समाज मे जाकर परिवार संचालन, परिवार नियोजन, पालन-पोषण और गृह-सज्जा आदि के बारे मे जानकारी दें।

१०–इनके मन से हीनभाव को निकालने के लिए सरकार को समानता के भाव का विकास करना चाहिए, ताकि ये राष्ट्र के विकास एव सम्वर्द्धन मे अपनी भूमिका सही ढग से निर्वाह सके।

REFERENCES

Anderson, J. D.—*The Peoples of India*, Cambridge, 1913.

Atal, Yogesh—*Adivasi Bharat*, Delhi, 1965.

Bhargava, B. S.—*Criminal Tribes*, Lucknow, 1949.

Crooke, W.—*Tribes & Castes of the N. W. Provinces & Oudh*, Calcutta, 1896.

Diwan, Pratipal Singh—*Bundelkhand ka Etihash*, Banara, Sambat 1985.

Govt. of India—*The Adivasis*, Delhi, 1959.

Govt. of M. P.—*A Study of Tribal People & Tribal Areas of M P.*, Bhopal. 1967.

Santog, M —"Attitude Towards Education", 1968.

Chopra, S. L —"Attitude Towards Education", Bhargava Book House, Agra, 1982.

SUMMARY

In the present investigation an attempt has been made to understand the prevailing causes and factors of educational standards using the social study methods which are of utmost significance and utility in Bundelkhand region of Uttar Pradesh state of India The analysis of the data obtained in the course of present work, reveals most interesting features of variation in mean standards amongst the male and female representatives of the samples incorporated in the study. Further more, the suggestions briefed in the report reveal the multi facts of the social organisation in general and the educational aspects in particular, thereby, inviting the attention of policy makers, social contributors and others too.

—**R. P. Pandey**

★

जब तुम अपने आप को शरीर समझते हो, तब तुम विश्व से अलग हो; जब तुम अपने आपको जीव समझते हो, तब तुम अनन्त अग्नि के एक स्फुलिंग हो, जब तुम अपने आप को आत्मस्वरूप मानते हो, तभी तुम विश्व हो।…विश्व है परमात्मा का व्यक्त स्वरूप।

—**स्वामी विवेकानन्द**

मोहम्मद रईस खान

हाई स्कूल प्राचार्यों के निर्णय के आधारों का अध्ययन

किसी भी क्षेत्र के प्रशासन मे निर्णय का महत्त्वपूर्ण स्थान है। निर्णय ही प्रशासक की सफलता-असफलता का द्योतक है। इसलिए कहा जाता है कि प्रशासन निर्णय के साथ प्रारम्भ होता है और निर्णय के साथ ही समाप्त हो जाता है। अनेक प्रशासक तो इसे प्रशासन का केन्द्र-बिन्दु मानते है।

शिक्षा प्रशासन मे भी निर्णय का अत्यन्त महत्त्वपूर्ण स्थान है। विद्यालय के प्राचार्य को अपने दैनिक कार्य के सम्पादन मे आने वाली अनेक समस्याओ पर निर्णय लेने पडते है। यदि प्राचार्य ने समस्या के विभिन्न पहलुओ को ध्यान मे रखकर निर्णय लिया है तो उसके परिणाम भी अच्छे प्राप्त होगे, परन्तु यदि उसने समस्या के विभिन्न पहलुओ पर विचार किये बिना निर्णय लिया है तो उसका परिणाम न केवल संस्था को भुगतना पड़ेगा, वरन् इससे सस्था की समुचित कार्य प्रणाली प्रभावित होगी। अत आवश्यक है कि प्राचार्य किसी भी समस्या पर पूर्णत विचार करके ही निर्णय ले।

प्रत्येक प्राचार्य की अपनी सोच होती है, निर्णय की शैली होती है एवं उनके निर्णय लेने के आधार होते है। अधिकाश प्राचार्य कानून को ही सर्वोपरि मानकर उसके आधार पर निर्णय लेते है, तो कुछ सस्था एवं छात्र हित को ही ध्यान में रखकर निर्णय लेते है। कोई प्राचार्य प्रजातांत्रिक तरीके के निर्णय लेना पसन्द करता है तो कोई स्व-विवेक से निर्णय लेता है। कुछ प्राचार्य बाहरी तत्त्वो के दबाव मे निर्णय लेते है, तो कुछ प्राचार्य निर्णय का भविष्य मे अच्छा प्रभाव पडे, इस बात को सर्वोपरि मानते है। इस प्रकार प्रत्येक

मोहम्मद रईस खान, रिसर्च स्कॉलर, शिक्षा सस्थान, देवी अहिल्या विश्वविद्यालय, इन्दौर (म० प्र०)।

प्राचार्य के अपने निर्णय के आधार होते है, जो उसके निर्णयों को प्रभावित करते हैं एवं जिनका उनके प्रशासन पर प्रभाव पड़ता है।

विद्यार्थियो की प्रगति ही शिक्षा प्रशासन का मुख्य उद्देश्य है और वह प्राचार्य के निर्णय पर निर्भर करता है। प्रशासन के निर्णय को उसकी सोच, परिस्थितियो के साथ-साथ उसके निर्णय के आधार भी प्रभावित करते है।

इस तथ्य के महत्त्व को ध्यान मे रखते हुए प्रस्तुत अध्ययन में प्राचार्य किस आधार पर निर्णय लेते है, यह जानने का प्रयास किया गया है।

अत अध्ययन का विषय है—

"इन्दौर (मध्य प्रदेश) नगर के हाई स्कूल प्राचार्यो के निर्णय के आधार का अध्ययन"

अध्ययन के उद्देश्य

प्रस्तुत अध्ययन का मुख्य उद्देश्य प्राचार्यो के द्वारा लिये जाने वाले निर्णय के आधारो को जानना है।

प्रस्तुत अध्ययन वर्णनात्मक विधि के अन्तर्गत सर्वेक्षण अध्ययन है।

न्यादर्श

इन्दौर नगर में कुल १०२ हाई स्कूल है। शोधकर्त्ता ने इन विद्यालयों मे २५ विद्यालयो का असभाव्यता न्यादर्श विधि के अन्तर्गत कोटा न्यादर्श विधि के अनुसार चयन किया है। इनमें विभिन्न प्रकार के विद्यालय जैसे शासकीय, अशासकीय एव बालक, बालिका एव सह-शिक्षा को शामिल किया गया है। यह विद्यालय नगर के विभिन्न क्षेत्रो मे स्थापित है।

उपकरण

प्रस्तुत अध्ययन का मूल उद्देश्य प्राचार्यो के निर्णय लेने के आधार का अध्ययन करना था। पूर्व में इस हेतु कोई उपयुक्त उपकरण उपलब्ध नही था। अत. इस हेतु शोधकर्त्ता ने प्रश्नावली का निर्माण किया। प्रश्नावली को अधिक विश्वसनीय बनाने के लिए उसकी निर्माण प्रक्रिया मे निम्न सोपानो का उपयोग किया गया।

सम्बन्धित साहित्य का अध्ययन किया।

प्रश्नावली हेतु विशेषज्ञों से चर्चा की गई।

प्रश्नावली का प्रथम प्रारूप तैयार किया गया।

विशेषज्ञो से पुन. चर्चा की गई ।

प्रश्नावली को सशोधित कर अन्तिम रूप दिया गया।

तत्पश्चात आंकडो का सकलन किया गया ।

प्रदत्तो का विश्लेषण

प्रस्तुत शोध कार्य मे विभिन्न प्राचार्यो द्वारा प्राप्त प्रदत्तो का विश्लेषण सारणी मे प्रस्तुत है ।

सारणी

N = २५
(आकड़े प्रतिशत मे)

क्र० स०	निर्णय के आधार	प्राचार्य मतानुसार निर्णय				
		सभी	अधिकाश	औसतन (आधे)	बहुत कम	बिल्कुल नही
१	२	३	४	५	६	७
१	उच्च अधिकारियो के निर्देशानुसार ही निर्णय लेना।	१६	६४	१२	८	—
२.	सस्था का उद्देश्य पूर्ण हो, मुख्यत निर्णय का आधार बनाना।	६०	४०	—	—	—
३.	कानूनी दायरे में रहते हुए निर्णय लेना	६८	२८	४	—	—
४	परम्परागत आधार पर ही निर्णय लेना।	—	१६	३६	४०	८
५.	संस्था की कार्य प्रणाली व व्यवस्था में कुछ नयापन आये, इस बात को ध्यान मे रखते हुए निर्णय लेना।	१६	५६	२४	४	—
६	किसी समस्या पर कमेटी बनाकर प्रजातान्त्रिक तरीके से निर्णय लेना।	२४	५६	१६	४	—

७	सिर्फ वर्तमान परिस्थितियो मे जो उपयुक्त लगे वही निर्णय ।	२०	४८	४	१६	१६
८	अपने वरिष्ठ साथियो से गहन चर्चा करके निर्णय लेना ।	८	६०	२०	१२	—
९.	स्व-विवेक से जो उपयुक्त लगे, वही निर्णय लेना ।	२८	४४	२०	४	४
१०	राजनीतिज्ञो के दबाव में आकर निर्णय लेना ।	—	—	—	२८	७२
११	पुस्तकों को पढने और चिन्तन के आधार पर निर्णय लेना ।	८	४८	३२	१२	—
१२.	मनोदशा (मूड) के आधार पर निर्णय लेना ।	—	४	८	१६	७२
१३	समस्या के प्रत्येक विकल्प पर पूर्णत विचार करके उपयुक्त निर्णय लेना ।	४४	४८	८	—	—
१४.	सस्था और प्रभावित होने वाले व्यक्ति की आवश्यकताओ को ध्यान मे रखकर ही निर्णय लेना ।	२८	३६	१२	१६	८
१५	विचारधारा विशेष से प्रभावित होकर निर्णय लेना ।	—	—	८	२०	७२
१६	आर्थिक उपलब्धता के आधार पर निर्णय लेना ।	१६	२०	२८	४	३२
१७.	विशेषज्ञो की राय के अनुसार ही निर्णय लेना ।	४	४८	३२	८	८
१८.	निर्णय का भविष्य मे अच्छा प्रभाव पड़े, मुख्यत यही आधार बनाना ।	४८	४०	४	४	४
१९.	पारिवारिक/सामाजिक दबाव मे आकर निर्णय लेना ।	—	—	—	१२	८८
२०	प्रबन्ध/स्थाई समिति के मतानुसार ही निर्णय लेना ।	२०	२८	२८	१२	१२

२१	झुंझलाहट मे पीछा छुड़ाने के लिए सामने वाले के मतानुसार निर्णय लेना	—	—	—	८	९२
२२.	स्वयं को बचाते हुए निर्णय लेना	—	४	१६	२४	५६
२३	धर्म ग्रन्थो के निर्देश अनुसार निर्णय लेना।	—	४	८	२०	६८
२४	मानवीय आधार पर निर्णय लेना।	२०	२८	२८	२०	४
२५	स्वय की छवि स्पष्ट रूप से झलके इसको ध्यान मे रखकर निर्णय लेना।	४	२८	१२	१६	४०

उपरोक्त सारणी के अध्ययन से स्पष्ट होता है कि—

१ उच्च अधिकारियो के निर्देशो को आधार मानकर १६% प्राचार्य सभी निर्णय लेते है, जब कि ६४% प्राचार्य अधिकाश निर्णय, १२% प्राचार्य औसतन (आधे) निर्णय एव ८% प्राचार्य बहुत कम निर्णय लेते है। इस आधार पर बिल्कुल नही निर्णय लेने की राय किसी भी प्राचार्य द्वारा व्यक्त नही की गई।

२ जहाँ तक सस्था का उद्देश्य पूर्ण हो, ६०% प्राचार्य सभी निर्णय इस आधार पर लेते है, जबकि ४०% प्राचार्य अधिकाश निर्णय इस आधार पर लेते है। औसतन निर्णय बहुत कम, व बिल्कुल नही निर्णय का उत्तर किसी भी प्राचार्य द्वारा नही दिया गया।

३ कानूनी दायरे को आधार मानकर ६०% प्राचार्य सभी निर्णय लेते है, जबकि २८% प्राचार्य अधिकाश निर्णय एव केवल ४% प्राचार्य औसतन निर्णय लेते है। इस आधार पर बहुत कम व बिल्कुल नही निर्णय लेने का मत किसी भी प्राचार्य द्वारा व्यक्त नही किया गया।

४ शिक्षा प्रशासन में परम्पराओ को निर्णय का आधार मानकर भी निर्णय लिए जाते है। इस आधार पर १६% प्राचार्य अधिकांश निर्णय लेते है, जबकि ३६% प्राचार्य औसतन निर्णय, ४०% बहुत कम निर्णय एव ८% प्राचार्य इस आधार पर निर्णय बिल्कुल नही लेते है। सभी निर्णय लेने का उत्तर किसी भी प्राचार्य द्वारा नही दिया गया।

५ सस्था की कार्य प्रणाली मे कुछ नयापन लाने को आधार मानकर १६% प्राचार्य सभी निर्णय लेते हे, जबकि ५६% प्राचार्य अधिकाश निर्णय, २४% प्राचार्य औसतन निर्णय एवं केवल ४% प्राचार्य बहुत कम निर्णय लेते हैं। बिल्कुल नही निर्णय लेने की राय किसी भी प्राचार्य द्वारा व्यक्त नहीं की गई है।

६ किसी समस्या पर कमेटी बनाकर प्रजातान्त्रिक तरीके से निर्णय लेने का चलन भी विद्यालयो मे विद्यमान है। इस आधार पर २४% प्राचार्य सभी निर्णय लेते है, जबकि ५६% प्राचार्य अधिकाश निर्णय, १६% प्राचार्य औसतन निर्णय एव केवल ४% प्राचार्य बहुत कम निर्णय पर लेते है। बिल्कुल नही निर्णय लेने का उत्तर किसी भी प्राचार्य द्वारा नही दिया गया।

७ सिर्फ वर्तमान परिस्थितियो मे जो उपयुक्त लगे उस आधार पर २०% प्राचार्य सभी निर्णय लेते है, जबकि ४४% प्राचार्य अधिकाश निर्णय १६% बहुत कम निर्णय एव १६% प्राचार्य कोई भी निर्णय नही लेते है।

८ अपने वरिष्ठ साथियो से गहन चर्चा के आधार पर निर्णय लेने की बात भी प्राचार्यो द्वारा स्वीकार की गई है। इस आधार पर ८% प्राचार्य सभी निर्णय लेते है, जबकि ६०% प्राचार्य अधिकाश निर्णय, २०% औसतन निर्णय एव १२% प्राचार्य बहुत कम निर्णय लेते है, परन्तु बिल्कुल नही निर्णय लेने की बात कोई प्राचार्य स्वीकार नही करता है।

९ स्व-विवेक से जो उपयुक्त लगे उसी को आधार मानकर २८% प्राचार्य अधिकाश निर्णय, २०% औसतन निर्णय, ४% बहुत कम निर्णय एव ४% प्राचार्य कोई भी निर्णय नही लेते है।

१०. जहाँ तक राजनीतिज्ञो के दबाव मे आकर निर्णय लेने का प्रश्न है, केवल २८% प्राचार्य बहुत कम निर्णय इस आधार पर लेते है, जबकि ७२% प्राचार्य कोई भी निर्णय राजनीतिज्ञो के दबाव मे आकर नहीं लेते है। सभी निर्णय, अधिकाश निर्णय एव औसतन निर्णय का उत्तर किसी भी प्राचार्य द्वारा नही दिया गया।

११ पुस्तको को पढ़ने एव चिन्तन के आधार पर निर्णय लेने की प्रवृत्ति भी प्राचार्यो मे पाई गई है। इस आधार पर केवल ८% प्राचार्य सभी निर्णय लेते है, जबकि ४८% प्राचार्य अधिकांश निर्णय, ३२% प्राचार्य औसतन निर्णय एवं १२% प्राचार्य बहुत कम निर्णय लेते है। इस आधार पर बिल्कुल नहीं निर्णय कोई भी प्राचार्य नही लेता।

१२. प्राचार्यों की मनोदशा (मूड) भी उनके निर्णय को कुछ मात्रा मे प्रभावित करती है। इस आधार पर केवल ४% प्राचार्य अधिकाश निर्णय लेते है, जबकि ८% प्राचार्य औसतन निर्णय, १६% प्राचार्य बहुत कम निर्णय एव ७२% प्राचार्य कोई भी निर्णय नही लेते है। सभी निर्णय कोई भी प्राचार्य नही लेता है।

१३ चवालीस प्रतिशत प्राचार्यो का कहना है कि हम समस्या के प्रत्येक विकल्प पर पूर्णत: विचार करके सभी उपयुक्त निर्णय लेते है, जबकि ४८% प्राचार्य अधिकाश निर्णय

एव ८% प्राचार्य औसतन निर्णय इसी आधार पर लेते है। बहुत कम एव बिल्कुल नही का उत्तर किसी भी प्राचार्य द्वारा नही दिया गया।

१४. सस्था और प्रभावित होने वाले व्यक्ति की आवश्यकताओ को ध्यान मे रखकर २८% प्राचार्य सभी निर्णय लेते है, जबकि ३६% प्राचार्य अधिकाश निर्णय, १२% औसतन निर्णय, १६% बहुत कम निर्णय एव ८% प्राचार्य इस आधार पर निर्णय बिल्कुल नही लेते है।

१५ विचारधारा विशेष प्राचार्यों के निर्णय को बहुत कम प्रभावित करती है। केवल ८% प्राचार्य इस आधार पर औसतन निर्णय लेते है एवं २०% प्राचार्य बहुत कम निर्णय, जबकि ७२% प्राचार्य इस आधार पर कोई भी निर्णय नही लेते। सभी व अधिकाश निर्णय लेने का उत्तर किसी भी प्राचार्य द्वारा नही दिया गया।

१६ निर्णय की आर्थिक उपलब्धता को आधार मानकर १६% प्राचार्य सभी निर्णय लेते हैं, जबकि २०% प्राचार्य अधिकांश निर्णय, २८% औसतन निर्णय, ४% बहुत कम निर्णय एव ३२% प्राचार्य इस आधार पर कोई भी निर्णय नही लेते है।

१७. जहाँ तक विशेषज्ञो की राय को आधार मानकर निर्णय लेने का प्रश्न है, केवल ४% प्राचार्य सभी निर्णय इस आधार पर लेते है, जबकि ४८% अधिकाश निर्णय, ३२% औसतन निर्णय, ८% बहुत कम निर्णय एव ८% प्राचार्य इस आधार पर बिल्कुल निर्णय नही लेते है।

१८ निर्णय का भविष्य में अच्छा प्रभाव पड़े, इस तरह की सोच भी प्राचार्यो मे देखी गई है। मुख्यत इसी आधार पर ४८% प्राचार्य सभी निर्णय लेते है एव ४०% प्राचार्य अधिकाश निर्णय लेते हैं, जबकि ४% प्राचार्य औसतन निर्णय, ४% बहुत कम निर्णय एव ४% प्राचार्य इस आधार पर निर्णय बिल्कुल नही लेते है।

१९ पारिवारिक/सामाजिक दबाव में आकर केवल १२% प्राचार्य ही बहुत कम निर्णय लेते है, जबकि ८८% प्राचार्य दबाव मे आकर कोई भी निर्णय नही लेते हैं। इस आधार पर सभी, अधिकांश एवं औसतन निर्णय लेने की राय किसी भी प्राचार्य द्वारा व्यक्त नही की गई।

२०. प्रबन्ध/स्थाई समिति के मत को आधार मानकर २०% प्राचार्य सभी निर्णय लेते है, जबकि २८% अधिकाश निर्णय, २८% औसतन निर्णय, १२% बहुत कम निर्णय एवं १२% प्राचार्य इस आधार पर निर्णय बिल्कुल नही लेते हैं।

२१ झुझलाहट मे पीछा छुडाने के लिए सामने वाले के मतानुसार निर्णय लेने की

प्रवृत्ति प्राचार्यों में नही के बराबर ही पाई गई है। केवल ८% प्राचार्य बहुत कम निर्णय इस आधार पर लेते है, जबकि ९२% प्राचार्यों के मतानुसार इस आधार पर कोई निर्णय नही लिया जाता है। सभी अधिकाश एवं औसतन निर्णय की राय किसी भी प्राचार्य द्वारा व्यक्त नही की गई है।

२२ स्वयं को बचाते हुए केवल ४% प्राचार्य अधिकांश निर्णय लेते है। जबकि १६% प्राचार्य औसतन निर्णय, २४% बहुत कम निर्णय एव ५६% प्राचार्य इस आधार पर कोई भी निर्णय नही लेते है। इस आधार पर सभी निर्णय लेने का उत्तर किसी भी प्राचार्य द्वारा नही दिया गया है।

२३ धर्म-ग्रन्थ के निर्देश भी शिक्षा प्रशासन मे कुछ अंशो में निर्णय के आधार हुआ करते हैं। इस आधार पर केवल ४% प्राचार्य अधिकाश निर्णय लेते है, जबकि ८% औसतन निर्णय, २०% बहुत कम निर्णय एव ६८% प्राचार्य इस आधार पर कोई भी निर्णय नही लेते है। सभी निर्णय लेने की राय किसी भी प्राचार्य द्वारा व्यक्त नहीं ही गई है।

२४ जहाँ तक शिक्षा प्रशासन मे मानवीय आधार पर निर्णय लेने का प्रश्न है, २०% प्राचार्य सभी निर्णय इस आधार पर लेते हें, जबकि २८% प्राचार्य अधिकाश निर्णय २८% औसतन निर्णय, २०% बहुत कम निर्णय एव केवल ४% प्राचार्य कोई भी निर्णय इस आधार पर नही लेते है।

२५. निर्णय में स्वय ही छवि स्पष्ट रूप से झलके इस आधार पर केवल ४% प्राचार्य सभी निर्णय लेते है, जबकि २८% प्राचार्य अधिकाश निर्णय, १२% औसतन निर्णय, १६% बहुत कम निर्णय एवं ४०% प्राचार्य कोई भी निर्णय इस आधार पर नही लेते है।

संक्षेप में हम कह सकते है कि अधिकाश प्राचार्य सस्था के उद्देश्य, विद्यालय की कार्य प्रणाली मे नयापन लाने, कानूनी दायरे मे रहकर, प्रजातान्त्रिक तरीको को अपनाते हुए वरिष्ठ साथियो से चर्चा करके, समस्या के विकल्पो पर पूर्णत. विचार कर, निर्णय का भविष्य मे अच्छा प्रभाव देखकर एव मानवीय आधार पर अधिकाधिक निर्णय लेते है। दूसरी तरफ प्राचार्य किसी के दबाव में आकर, मूड के आधार पर, झुंझलाहट मे, स्वयं को बचाते हुए, विचारधारा से प्रभावित होकर, अपनी छवि को अलग से झलकाने के चक्कर मे एवं विद्यालय प्रशासन में धर्मग्रन्थो के निर्देशों को स्वीकार करते हुए बहुत कम या नही के बराबर निर्णय लेते है, जो कि उनको आत्मविश्वासी, ज्ञानी, कुशल प्रशासक, दृढ़ निश्चिय वाला, निर्णय शक्ति एव निष्पक्ष व्यवहार वाला प्रशासक दर्शाना है। प्राचार्यों में इन गुणों का होना शिक्षा प्रशासन के लिए शुभ लक्षण है।

ABSTRACT

The purpose of this study was to know the basis of decisions taken by the principals of high schools of Indore city in their day to day administration. The study was conducted on 25 school principals by stratified random sampling technique. The views of principals for knowing the basis of their decisions were collected on a five point rating scale consisting of 25 questions prepared by the investigator. The collected data reveal that most of the principals take decisions after considering factors like objectives of the institution, novelty, democrative methods, consequences of different alternatives and impact of decision in future. Also a few principals take resort to factors like pressure, mood, irritation, saving oneself, getting influenced by ideology, making one's image and accepting the rulings of religious texts.

—Mohammad Rais Khan

★

खेलना और पढ़ना

यदि विद्यार्थियों को खेलों मे आनन्द आता है और अध्ययन में नहीं, तो स्पष्ट है कि हमारे अध्यापन मे कहीं न कहीं कोई कमी है। इसका सीधा सा एक कारण है। हम जानते है कि जब कोई शिक्षक गणित, इतिहास अथवा अन्य कोई विषय, जिसे वह सचमुच प्रेम करता है, पढ़ाता है तब विद्यार्थी भी उस विषय से प्रेम करने लग जाते है क्योंकि प्रेम स्वयं अपनी बात कहता है। लेकिन हम मे से अधिकांश अपने विषयो को प्यार ही नही करते। विषय हमारे लिये बोझ होता है, जिसे पढ़ाना हमारी आदत बन जाता है। इसके माध्यम से हम अपनी आजीविका कमाते है। हमे इसमे रुचि नहीं होती। यही कारण है कि विद्यार्थियो को भी ऐसे विषय मे न रुचि होती है और न उन्हे इसमे आनन्द आता है।

—जे० कृष्णमूर्ति

(**नया शिक्षक** से साभार)

ध्यान कैसे करें ?

ध्यान और कर्म मे हमें बहुत-सी चीजे करनी होती है, लेकिन एक जरूरी बात है, नीद से पहले और नीद मे ध्यान। तुम जानते हो, तुम्हारे सामने कोई समस्या है, तुम उसे लिये हुए ही सो जाते हो और सवेरे देखते हो कि समस्या हल हो गयी या कभी-कभी तुम सवेरे बहुत थके हुए उठते हो, तुम्हें ठीक नीद नही आयी क्योंकि तुमने सोने से पहले ध्यान करके अपने-आपको तैयार नही किया। यह जरूरी नही है कि सोने से पहले बैठकर ध्यान किया जाये। तुम लेटकर भी कर सकते हो। यह बहुत सीधा-सादा ध्यान होता है। बिस्तर पर लेट जाओ, अगर तुम्हारा कोई इष्ट देवता है तो यही कल्पना करो कि तुम उसकी गोद मे लेटे हुए हो क्योंकि ध्यान में तुम्हारी सारी चेतना केवल भगवान् पर ही केंद्रित होनी चाहिये।

एक बार तुम्हारा भगवान के साथ सपर्क हो जाये तो वे ससार मे अपने काम के लिये तुम्हारा उपयोग करेंगे। अगर तुम्हारे आगे कोई समस्या है तो उसे इस ध्यान के बाद उनके आगे रख दो, यह उन्हे सौप कर सो जाओ, फिर तुम देखोगे कि क्या होता है। मान लो तुम नीद में सचेतन होना चाहते हो तो तुम ऐसा कर सकते हो और साथ-ही-साथ अभीप्सा करो कि नीद तुम्हारे लिये आराम और विश्राम लेकर आये। तुम अपने जीवन का तिहाई हिस्सा, शायद सात-आठ घटे तो सोते ही हो। अगर तुम सोने से पहले ध्यान करो तो देखोगे कि इससे परिणाम आता है।

छाया गुप्ता
सरवत फातिमा खान

गतिविधि आधारित अनुदेशन सामग्री का विकास एवं उसकी सैद्धान्तिक उपलब्धि की प्रभाविता का अध्ययन

प्रस्तावना

शिक्षा समाज के गुणात्मक विकास एवं वृद्धि का एक महत्त्वपूर्ण साधन रही है। आधुनिकीकरण विज्ञान प्रौद्योगिकी के विकास का प्रभाव शिक्षा पर भी स्पष्ट है, जिससे शिक्षक का उत्तरदायित्व बहुत बढ़ गया है। शिक्षक से अपेक्षित है कि वह छात्रों को उचित मार्गदर्शन दे एवं उनके सर्वांगीण विकास मे सहायक हो। शिक्षण सस्थाओ मे केन्द्र बिन्दु शिक्षक न होकर छात्र हो। छात्र अधिक सक्रिय हो तो शिक्षण अधिगम का स्वरूप क्या होगा ऐसा प्रश्न आना स्वाभाविक है, अत यह बिन्दु अधिक ध्यानाकर्षण चाहता है। वर्तमान शिक्षण-प्रशिक्षण प्रणाली भावनात्मक रूप से छात्र अध्यापको के विकासानुकूल नही है। इसके अन्तर्गत प्रत्येक छात्र की व्यक्तिगत आवश्यकताओ, कमजोरियों, प्रवृत्तियो, क्षमताओ और योग्यताओ का आकलन सही रूप से नहीं किया जाता है। इसलिए छात्र कक्षा मे खुले रूप में अपनी समस्याओ को प्रकट नही कर पाते है। इस कारण उनमे समूह की विशेषताओ जैसे नेतृत्व, सहयोग, सम्प्रेषण, उत्तरदायित्व की भावना का विकास नही हो पाता है।

वैयक्तिक विभिन्नताओ के अनुसार विषयवस्तु को पढने एवं प्रस्तुतीकरण की स्वतत्रता न होने के कारण उनमे सक्रिय भागीदारी नही हो पाती है, इसी से सम्बन्धित देवी अहिल्या विश्वविद्यालय के शिक्षा अध्यापन विभाग मे एक भिन्न प्रकार से बी० एड० कार्यक्रम चल

डॉ० छाया गुप्ता, व्याख्याता शिक्षा सस्थान, देवी अहिल्या वि०वि० इन्दौर (म०प्र०)
कु० सरवत फातिमा खान, एम० एड० छात्रा

रहा है, जिसे बी० एड० गतिविधि कहा जाता है, जिसमे शिक्षण प्रशिणार्थियो को केन्द्र मानकर प्रशिक्षण दिया जाता है।

इस कार्यक्रम के मुख्य बिन्दु निम्नानुसार है :—

१ छात्र सक्रियता का महत्त्व

२ समयसारिणी अथवा घटियो का बन्धन के नही बराबर

३ शिक्षक व्याख्यान अल्प

४. व्यक्तिगत अथवा सामूहिक अधिगम को प्रोत्साहन

५ प्रशिक्षणार्थियो को सीखने का तरीका, समय, स्थान एवं विधियों को चुनने की स्वतन्त्रता

६ साथी मूल्याकन को अधिभार

७ शिक्षक एक मार्गदर्शक, प्रेरक एव सहायक

गतिविधि आधारित अनुदेशन सामग्री

गतिविधि आधारित अनुदेशन सामग्री से अभिप्राय ऐसी सामग्री से है जो छात्र केन्द्रित है, जिसमे छात्र सक्रिय रहकर अध्ययन करता है। इस सामग्री में छात्रो को पाठ्यवस्तु के चयन, अध्ययन तथा प्रस्तुतीकरण मे व्यक्तिगत विभिन्नताओ, योग्यताओ, अभिक्षमताओं के अनुसार विभिन्न प्रकार की गधिविधियो को करने के अवसर दिये जाते है।

उद्देश्य

१. सम्प्रेषण इकाई से सम्बन्धित पाठ्यवस्तु की रूपरेखा तैयार करना।

२ पाठ्यसामग्री से सम्बन्धित गतिविधियो का चयन करना।

३ निर्मित सामग्री की प्रभाविकता का अध्ययन, मानदण्ड, परीक्षण के सन्दर्भ मे करना।

परिकल्पना

गतिविधि आधारित अनुदेशन सामग्री पर प्रशिक्षणार्थियों की सैद्धान्तिक उपलब्धि के पूर्व एव पश्च परीक्षण के प्राप्ताको के मध्यमान मे कोई सार्थक अन्तर नही होगा।

सीमाकन

अध्ययन बी० एड० गतिविधि कार्यक्रम के २५ प्रशिक्षणार्थियो तक ही सीमित रहा है। अध्ययन बी० एड० पाठ्यचर्चा के प्रश्नपत्र ५०५ के (माइक्रो-टीचिग एव मॉडल्स आफ टीचिग) की एक इकाई सम्प्रेपण तक सीमित रहा है।

न्यादर्श

प्रस्तुत शोध अध्ययन में देवी अहिल्या विश्वविद्यालय के बी० एड० गतिविधि के समस्त विद्यार्थी (२५) को सम्मिलित किया गया।

उपकरण

प्रस्तुत शोध अध्ययन मे प्रदत्तो के संकलन हेतु स्वत. निर्मित मानदण्ड परीक्षण को उपकरण के रूप मे प्रयोग किया गया।

निरीक्षण

प्रशिक्षणार्थियो के व्यवहार एवं उनके द्वारा किये गये प्रस्तुतीकरण का निरीक्षण किया गया।

साक्षात्कार

अध्ययन, विचार-विमर्श, प्रस्तुतीकरण के पश्चात् छात्रो के व्यवहार में आए परिवर्तन को जानने हेतु शोधकर्त्री द्वारा सहपाठियो एवं सम्बन्धित शिक्षको का साक्षात्कार लिया गया। शोध अभिकल्प—प्रस्तुत शोध अध्ययन का शोध अभिकल्प पूर्व पश्च प्रयोगात्मक है।

प्रदत्तों के संकलन की विधि

सर्वप्रथम शिक्षण प्रशिक्षणार्थी का प्रारम्भिक ज्ञान जानने के उद्देश्य से निर्मित सामग्री से सबंधित पूर्व परीक्षण दिया गया। पूर्व परीक्षण लेने के पश्चात प्रशिक्षणार्थियो को निर्मित की गई गतिविधि आधारित अनुदेशन सामग्री दी गई, जिसमे दी गई गतिविधियो के प्रस्तुतीकरण के लिए समय दिया गया। प्रस्तुतीकरण का निरीक्षण एंव दी गई जानकारी का सकलन किया गया, तत्पश्चात् सबंधित शिक्षको से भी प्रशिक्षणार्थियो के बारे में जानकारी हासिल की गई। साक्षात्कार के पश्चात् प्रशिक्षणार्थियो को पश्च परीक्षण दिया गया। पश्च परीक्षण के द्वारा उनकी सैद्धांतिक उपलब्धि को मापा गया।

अकों का सांख्यिकीय विश्लेषण

उद्देश्यो की प्राप्ति किस सीमा तक हुई है, यह जानने के लिए उद्देश्यो के अनुसार सांख्यकीय विधियो का उपयोग किया गया। प्रशिक्षणार्थियो को गतिविधि अधारित अनुदेशन सामग्री की सैद्धांतिक उपलब्धि को ज्ञात करने के उद्देश्य मे पूर्व एव पश्च परीक्षण से प्राप्त

आंकडो का विश्लेषण सहसम्बन्धी t (corelated t) तथा प्रसार गुणाक (coefficent of variance) द्वारा किया गया।

सूत्र १ $t = \frac{M_1 \sim M_2}{\sqrt{s\varepsilon_1^2 + s\varepsilon_2^2 - \sigma s\varepsilon_1 s\varepsilon_2}}$

सूत्र २ . $Cv = \frac{SD}{M} \times 100$

तालिका

गतिविधि आधारित अनुदेशन सामग्री पर सैद्धातिक उपलब्धि के लिये मध्यमान बिचलन त्रुटि, सहसबध तथा टी मान के लिये तालिका

परीक्षण	मध्यमान	विचलन त्रुटि	सहसबध	टी मान
पूर्व परीक्षण	८ २६	०.३१	० ५६	१६ ४४५
पश्च परीक्षण	११ १३	० ३८	—	—

उपरोक्त तालिका से स्पष्ट है कि टी का मान १६ ४४३ ज्ञात हुआ है। यह मान ०१ सार्थकता स्तर पर सार्थक है, अत अमान्य परिकल्पना अस्वीकृत हो जाती है, जिससे यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि पूर्व एव पश्च परीक्षण की सैद्धातिक उपलब्धि मे सार्थक परिवर्तन हुआ है, अत यह कहा जा सकता है कि गतिविधि आधारित अनुदेशन सामग्री छात्रो की सैद्धातिक उपलब्धि के सन्दर्भ मे प्रभावशाली है।

परिणाम एवं परिणामों की विवेचना

गतिविधि आधारित अनुदेशन सामग्री छात्रों की सैद्धातिक उपलब्धि के सन्दर्भ में प्रभावशाली है।

प्रस्तुत शोध अध्ययन का उद्देश्य सम्प्रेषण इकाई पर गतिविधि आधारित अनुदेशन सामग्री विकसित करना था, जिसके लिये मुख्य कार्य संबधित पाठ्यवस्तु को विश्लेषित कर उसकी रूपरेखा तैयार करना रहा जिससे पाठ्यवस्तु सहज एव सरल हो सके और प्रशिक्षणार्थी उसमे निहित सकल्पना को भलीभाँति समझ सके इसके लिए प्रत्येक बार मे केवल एक ही सकल्पना प्रस्तुत की गई। इस प्रकार विश्लेषण एव क्रमिक प्रस्तुतीकरण छात्रो की सैद्धांतिक उपलब्धि में सहायक रहा।

निर्मित सामग्री मे छात्रों को अपनी रुचि एव योग्यता के अनुसार कार्य करने की स्वतत्रता दी गई है। बृजभान (१९६८) के शोध अध्ययन परिणाम दर्शाते है कि जब भी छात्र अपनी रुचि के अनुसार प्रकरण चयन कर उसे स्वत प्रस्तुत करते है तो अधिगम प्रभावी होता है।

यह सामग्री वैयक्तिक अनुदेशन सामग्री है, इस मे अध्ययन के समय के लिए आवश्यकतानुसार समय की स्वतत्रता है एव अध्ययन के समय साथी चर्चा का अवसर उपलब्ध है, ताकि जो बिन्दु ठीक से ग्रहण नहीं हो सका है, उसे भलीभाँति समझा जा सके। इसके अतिरिक्त प्रस्तुत सामग्री मे विभिन्न गतिविधियो के माध्यम से प्रस्तुतीकरण का अवसर भी उपलब्ध है जो विषयवस्तु की ग्राह्यता से सबंधित है, अत यह सामग्री सैद्धातिक उपलब्धि पर प्रभावी रही है।

निष्कर्षो का निहितार्थ

प्रस्तुत शोध अध्ययन को कई व्यक्तियो के उपयोग में लाया जा सकता है। प्रस्तुत सामग्री का शैक्षिक निहितार्थ निम्नलिखित है —

शोधकर्ता के लिए

प्रस्तुत गतिविधि आधारित अनुदेशन सामग्री के निष्कर्षो से स्पष्ट है कि इस प्रकार की सामग्री व्यक्तित्व विकास के लिए सैद्धातिक उपलब्धि में अधिक महत्वपूर्ण है। प्रस्तुत सामग्री आत्मविश्वास, चितनशक्ति बढ़ाने मे सहायक है। अत. शोधकर्ता द्वारा इस प्रकार की सामग्री विकसित कर विद्यार्थी के आत्मविश्वास और चिंतनशक्ति को विकसित करने के उपयोग मे लाया जा सकता है।

प्रशिक्षार्थियो के लिये

प्रस्तुत गतिविधि आधारित अनुदेशन सामग्री का शिक्षक प्रशिक्षणार्थियो के द्वारा उपयोग किया गया। जिससे उनका ज्ञानात्मक, भावनात्मक एव क्रियात्मक पक्ष का विकास हुआ। अत इस सामग्री को प्रशिक्षार्थियो द्वारा उपयोग मे लाया जा सकता है।

श्रमिक प्रशिक्षकों के लिये

शिक्षक प्रशिक्षण सस्थाओ का प्रमुख उद्देश्य प्रभावशाली शिक्षक तैयार करना है। शिक्षक केवल एक प्रभावी सम्प्रेषक ही नही, वरन् एक प्रेरक मार्गदर्शक एवं सहायक बन सके इस प्रकार की गतिविधि आधारित सामग्री व्यक्तित्व विकास मे अधिक सहायक है, अत. शिक्षक प्रशिक्षको के द्वारा इस प्रकार की सामग्री का निर्माण, विकास एव प्रयोग शिक्षक के व्यक्तित्व विकास मे सहयोगी होगी।

आगामी शोध हेतु सुझाव

प्रस्तुत शोध अध्ययन सीमित समय व दायरो मे सम्पन्न किया गया। सबधित क्षेत्र मे अन्य शोध कार्य भी किये जा सकते है जैसे—

१. इस प्रकार की सामग्री को बड़े समूह पर प्रशासित किया जा सकता है।
२ प्रस्तुत सामग्री केवल सम्प्रेषण इकाई पर निर्मित की गई। इस प्रकार की सामग्री अन्य विषयों के लिये भी बनाई जा सकती है।
३. गुणात्मक विश्लेषण के लिए और अधिक व्यक्तियों की भागीदारी होना चाहिए।
४ इस प्रकार की सामग्री के लिए और अधिक गतिविधियों का उपयोग किया जा सकता है।

REFERENCES

Buch, M B. (Ed), (1979). *A Survey of Research in Education Case*, M. S U, Baroda.

Buch, M. B (Ed.), (1986). *Third Survey of Research in Education*, National Council of Education, Research & Training, New Delhi

Passi, B. K., Tyagi, S. K. & Gupta, C., (1992). "Personalized Teacher Education Learning Flesh to An Idea" Institute of Education, D A. V V., Indore

Dahama, O. P., (1980) *Education & Communication for Development*, New Delhi, Oxford & IBH Publishing Co.

Saloman, G., (1981). *Communication & Education*, Sage Publication, Beverly Hills/London, New Delhi.

ABSTRACT

(Development of Activity Based Instructional Material)

Secondary Teacher Education in India has taken great stride since Independence. A variety of innovative trends have emerged in the field of Teacher Education at B.Ed. level To make Teacher Education truly learner centered and personalized, Institute of Education, Devi Ahilya University, Indore, M. P. is organising more or less Zero lecture Activity based teacher education programme since. 1991. This programme is radically different from the traditional one as almost all the theoritical courses are learnt, rather than taught by the teacher The present study was aimed at the development of activity based instructional material and to study its effectiveness in terms of theoritical attainment of learners. As there is scope in the material to provide variety of learning experiences and freedom to use different modes of learning, the material was found effective in terms of theoretical attainment of the content by the learners.

Chhaya Gupta
Sarwat Fatima Khan

लक्ष्मीनारायण दुबे

खिलाड़ियों के समायोजन एवं नेतृत्व गुणों का अध्ययन

मानव ने जिस प्रकार सभ्यता के विकास क्रम में पहले अकेले और फिर समूह मे रहकर अपना योगदान दिया उसी प्रकार जीवन को आनन्दित एव प्रफुल्लित करने और स्फूर्ति मान बनाने मे व्यक्तिगत एव सामूहिक कार्यो मे भाग लेता रहा है। ये कार्य मनोरंजन और आनन्द प्रदान करने वाले रहे है जिन्हे खेल की सज्ञा दी गई। खेल वह माध्यम है जो मनोरजन के साथ-साथ शारीरिक, मानसिक, सामाजिक और संवेगात्मक विकास मे सहायता करता है। खेल व्यक्ति को स्वाभाविक रूप से समायोजन एव नेतृत्व गुणों के विकास में भी सहायता पहुँचाते है। समायोजन और नेतृत्व गुण ऐसी विशेषताएँ है जो व्यक्ति को समाज मे सफल जीवन व्यतीत करने मे सहायक होती हे।

खेल मे सलग्न खिलाडी दिवास्वप्न, चिन्ता तनाव आदि से मुक्त होते है और उनका सम्पूर्ण विकास समुचित गति से होता रहता है। खेल चारित्रिक, नैतिक और व्यक्तित्व के एव नेतृत्व गुणो के विकास मे सहायक है। विभिन्न अध्ययनो से ज्ञात होता है कि विभिन्न प्रकार के खेलो का प्रभाव अलग-अलग पडता है। एकल और सामूहिक खेलो का प्रभाव भी भिन्न हो सकता है। इस अध्ययन मे एकल और सामूहिक खेलो का समायोजन एव नेतृत्व गुणो के विकास पर प्रभाव का अध्ययन किया गया है।

परियोजना

न्यादर्श—न्यादर्श का चयन रानी दुर्गावती विश्वविद्यालय जबलपुर एव सम्बन्धित महाविद्यालयों को विभिन्न टीमो के खिलाडियो से किया गया। ये खिलाडी पिछले दो वर्षो

प्रो० लक्ष्मीनारायण दुबे, प्राध्यापक, सरस्वती शिक्षा महाविद्यालय, जबलपुर।

से विश्वविद्यालय का अन्तर विश्वविद्यालयीन खेलकूद प्रतियोगिताओ मे प्रतिनिधित्व करते रहे हैं। इनकी आयु सीमा १७ से २४ वर्ष की है और ये खिलाडी स्नातक और स्नातकोत्तर कक्षाओ मे अध्ययनरत रहे है। खिलाडियो की कुल सख्या २०० रही।

सारणी—१
एकल खेलो के खिलाड़ी

खेल	पुरुष	महिला	योग
एथेलेटिक	१०	१०	२०
बैडमिन्टन	१०	१०	२०
जिमनास्टिक	१०	१०	२०
तैराकी	१०	१०	२०
टेबिलटेनिस	१०	१०	२०
	५०	५०	१००

सारणी—२
सामूहिक खेलों के खिलाड़ो

खेल	पुरुष	महिला	योग
हाकी	१०	१०	२०
वास्केटवाल	१०	१०	२०
कबड्डी	१०	१०	२०
खो खो	१०	१०	२०
वालीबाल	१०	१०	२०
	५०	५०	१००

उपकरण

१. महाविद्यालयीय छात्रो के लिए समायोजन मापनी ए० के० पी० सिन्हा एव आर० पी० सिंह।

२ खिलाडी के नेतृत्व गुण मापनी शोधकर्त्ता द्वारा निर्मित ।

३ सामान्य जानकारी प्रपत्र शोधकर्ता द्वारा निर्मित ।

सारणी—३

एकल एव सामूहिक खेलों के खिलाड़ियो के समायोजन सम्बन्धी परिणाम (संख्या—२००)

समायोजन के क्षेत्र	समूह	मध्यमान	मानक विचलन	टी मान्य	अन्तर
	एकल	४ ४९	२ ५९		
गह				२ ६२	सार्थक
	सामूहिक	३ ३२	२.०३		
	एकल	३ ४५	२.१९		
स्वास्थ्य				४ ००	सार्थक
	सामूहिक	२ २१	२ १०		
	एकल	८ ०६	२ २२		
सामाजिक				४.७६	सार्थक
	सामूहिक	५ ७३	३ ५३		
	एकल	० १८	४.३३		
संवेगात्मक				४ २७	सार्थक
	सामूहिक	८ २४	४.५९		
	एकल	६ ४१	२ ९३		
शैक्षिक				१ ६४	असार्थक
	सामूहिक	५ ६१	३ ३६		
	एकल	३३ ३०	१०.९८		
कुल समायोजन				३ ५६	सार्थक
	सामूहिक	२७.५६	९ ०८		

० ०१ विश्वास स्तर पर क्रान्तिक अनुपात=२५ ८

०.०५ विश्वास स्तर पर क्रान्तिक अनुपात=१ ९६

सारणी क्रमांक ४

एकल और सामूहिक खिलाड़ियों के नेतृत्व गुण सम्बन्धी परिणाम (सख्या—२००)

नेतृत्व गुण	समूह	मध्यमान	मानक विचलन	क्रान्तिक अनुपात	अन्तर
	एकल	१०.६९	२ ४४		
चरित्र				१ ०२	सार्थक नही है
	सामूहिक	११ ५२	२ ३०		
	एकल	१०.६३	३ ३७		
बौद्धिक योग्यता				१ ०९	सार्थक नही है
	सामूहिक	१२ १०	२ ५४		
	एकल	१२ १५	३ ०३		
खिलाडी भावना				३.९०	सार्थक
	सामूहिक	१३ ६४	२.६१		
	एकल	११ ६५	२ ८१		
जोखिम उठाने की क्षमता				२ ५७	सार्थक
	सामूहिक	१२.६२	२ ४८		
	एकल	१० ९२	२ ४१		
उत्तरदायित्व				२ ०९	सार्यक
	सामूहिक	११ ८९	२ २५		
	एकल	९ ९७	२ २३		
आत्मविश्वास				१ ३४	सार्थक
	सामूहिक	१० ४५	२ ७४		
	एकल	११ ९५	२.६८		
दृढ संकल्प				३ २२	मार्थक
	सामूहिक	१३ १८	२ ०८		
	एकल	८९ ३५	११ ०७		
कुल नेतृत्व				६ २१	सार्थक
	सामूहिक	९९.६१	१२ ११		

० ०१ विश्वास के स्तर पर कान्तिक अनुपात का मान = २ ५८

० ०५ विश्वाम के स्तर पर कान्तिक अनुपात का मान = १ ९६

निष्कर्ष एवं सुझाव

सामूहिक खेल के खिलाड़ियो का गृह, स्वास्थ्य सामाजिक सवेगात्मक समायोजन एकल खेलो के खिलाडियो की अपेक्षा अधिक अच्छा है। परन्तु शैक्षिक क्षेत्र के समायोजन मे कोई सार्थक अन्तर नही पाया गया।

कुल समायोजन की दृष्टि से सामूहिक खेलो के खिलाडी अधिक अच्छे पाये गये।

सामूहिक खेलों के खिलाडियों मे एकल खेलों के खिलाडियो की अपेक्षा खिलाड़ी भावना जोखम उठाने की क्षमता, उत्तरदायित्व, आत्म विश्वास और दृढ सकल्प सम्बन्धी गुणों मे श्रेष्ठ पाये गये, जबकि चरित्र एवं बौद्धिक योग्यता मे कोई सार्थक अन्तर नहीं पाया गया।

कुल नेतृत्व गुणों की दृष्टि से सामूहिक खेलो के खिलाडी एकल खेलो के खिलाडियो की अपेक्षा उत्तम पाये गये।

इस अध्ययन से यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि खिलाडियो के उत्तम समायोजन एवं नेतृत्व गुणो के विकास के लिए एकल खेलो के साथ-साथ सामूहिक खेलो मे भाग लेने के लिए प्रेरित किया जाना चाहिए।

सन्दर्भ

१. रिचार्ड एस० सुनम, खेल मनोविज्ञान (१९७७)

२. एन० आई पोनो मारयोन, खेल और समाज (१९८१)

ABSTRACT

Adjustment and Leadership qualities of Sportsmen of Individual and Group Games

Sports is a social experience. An individual lives and functions as a part of a group and games and sports provide ample group interaction. Sportsmen get pleasure as well as opportunities of social and emotional development in different sports events. Games and sports help the child to develop adjustment ability and leadership qualities.

In this study the effect of individual and group games on adjustment ability and leadership qualities are compared Two hundred boys and girls

of individual games and 200 boys and girls of group games are included in this study. These sportsmen are participating since last two years in the Inter-University games and Sports Tournaments. The age range is 17 to 24 years.

Adjustment Inventry for College Students (A K P Sinha) and Leadership Ability Test (Rathore & Dubey) were used for data collection

The results reveal that the sportsmen of group games significantly differ in home, health social and emotional adjustment to the sportsmen of individual games while there is no significant difference in adjustment in educational field

The sportsmen of group games are found superior to the individual games in sportsmen spirit, risk taking ability, feeling of responsibility, self-confidence and firm determination while there is no difference in character and intellectual ability

From this study it can be concluded that the young children should be encouraged to participate more in the group games in order to develop better adjustment and leadership qualities.

L. N. Dubey

—तुम्हारा चाहे जो पेशा हो, तुम्हारा चाहे जो काम हो, उसे प्रगति के सकल्प के साथ करो। तुम जो कुछ करो, उसे न सिर्फ अपनी सामर्थ्य भर अच्छा करो, बल्कि हमेशा पूर्णता की ओर बढते हुए, हमेशा अच्छे से अच्छा करते रहने के उत्साह के साथ करो। इस तरह, बिना अपवाद के सभी चीजे रुचिकर हो जाती है।

—जो चीज हम बच्चे को सिखाना चाहते हैं उसमे उसकी दिलचस्पी उत्पन्न कर दे, कार्य करने की रुचि, उन्नति करने की इच्छा जगा दे।

संजीवकुमार शर्मा

राजनीति विज्ञान में भारतीयता पर शोध

राजनीति विज्ञान के विद्यार्थियों को प्रारम्भ से ही पढाया जाता है कि "राजनीति-शास्त्र यूनान से आरम्भ होता है।" इस पाश्चात्य शिक्षा पद्धति के अन्राष्ट्रवादी दृष्टिकोण का ही परिणाम है कि तुलना करते समय भी चाणक्य को भारतीय मैकियाविली कह दिया जाता है। कालिदास को भारतीय शैक्सपीयर कहते है। जबकि सच यह है कि विदेशी चश्मे से शिक्षा प्राप्त भारतीय लेखको, इतिहासकारो तथा राजनीतिक विचारको ने कभी भी ध्यान से यह देखने की कोशिश कदापि नही की है कि पश्चिम के विचारको ने बारहवी-तेरहवी शताब्दी के बाद जो कहा है और जिसे हम आधुनिक सभ्यता तथा विकास के प्रस्थान बिन्दु के रूप मे स्वीकार करते आ रहे है वह ईसा से पूर्व भारतीय विचारको ने अधिक स्पष्ट, अधिक वैज्ञानिक और अधिक दूरदर्शितापूर्ण तरीके से यह कह दिया है। प्रस्तुत शोध पत्र का उद्देश्य इसी प्रकार की कुछ अवधारणाओ के भारतीय मूल तलाशना है।

स्वतन्त्रता से पूर्व के भारतीय मनीषियों मे यह चेतना किञ्चित् व्यापक और गम्भीर रूप मे परिलक्षित होती है। यही कारण है कि माण्डले जेल में बैठे हुए तिलक गीता-रहस्य जैसी आध्यात्मिक गरिमा से परिपूर्ण तार्किक व विश्लेषणात्मक पुस्तक की रचना करते है तो विवेकानन्द जैसे महामानव पाश्चात्य सभ्यता के सुदृढतम गढ़ मे भारतीय चिन्तन की श्रेष्ठता का शखनाद करते है। राष्ट्रपिता महात्मा गांधी यदि अपने सामाजिक-राजनीतिक विचारों की आधारभूमि श्रीमद्भगवद्गीता की नैतिकता को मानते है तो श्री अरविन्द, महर्षि रमण, सर्वपल्ली राधाकृष्णन् जैसे मनीषी भारतीय दर्शन की वैचारिक तथा व्याव-हारिक उपयोगिता तलाशते हुए दृष्टिगोचर होते है। सामाजिक-राजनीतिक कारणो की

डा० सजीवकुमार शर्मा, प्रवक्ता राजनीति विज्ञान, कुमायू विश्वविद्यालय परिसर, अल्मोडा।

समीक्षा करने पर भी यही लगता है कि पाश्चात्य शिक्षा प्रणाली के माध्यम से दीक्षित होने पर भी ये लोग उसकी अप्राकृतिक तथा परमुखोपेक्षी चकाचौंध से अभिभूत नही हुए थे और अपनी मातृभूमि की और देखने तथा उसे समझने के प्रयास में अपनी हेठी नही समझते थे। यद्यपि इसके अपवाद भी हमे उस काल में मिल सकते है। परन्तु इन विचारकों की ज्ञानवृद्ध दीपशिक्षा ही उन पराधीनता के असह्य और पीड़ाकारक क्षणो मे भी हमारी समूची पीढ़ी का पथ आलोकित करती रही है। कदाचित इसी आत्मगौरवशालिनी परम्परा का एक सद्परिणाम यह भी हुआ कि एकाध अपवाद को छोडकर सम्पूर्ण राष्ट्रीय आन्दोलन अपने स्वरूप मे भारतीय आन्दोलन बना रहा।

परन्तु स्वतन्त्रता प्राप्ति के बाद का भारतवर्ष सर्वथा भिन्न दृश्य उपस्थित करता है। आज का सामान्य विद्यार्थी या नवयुवक भारतीय परम्पराओ, मान्यताओ तथा सास्कृतिक पृष्ठभूमि से पूर्णत अनभिज्ञ दिखाई पडता है। उसे विदेशी सस्कृति, वेष-भूषा, आचार, व्यवहार, आहार, संगीत, नृत्य, पूर्वज, शिक्षा तथा राजनीति का अपेक्षाकृत अधिक ज्ञान तो है ही, साथ ही उस पर गौरवान्वित होने का भाव भी उसके मन मे है। हम भारतीय उसे भाषा की दृष्टि से अपंग, शिक्षा की दृष्टि से अधकचरे, सस्कृति की दृष्टि से अपरिपक्व, परम्परा का दृष्टि से रूढ़िवादी और अन्य अधिकाश क्षेत्रों मे पिछडे हुए दिखाई पड़ते है। यही कारण है कि भारतीय कला, विज्ञान, साहित्य, सगीत, शिक्षा और अर्थव्यवस्था सभी परमुखोपक्षी और असहाय से दिखाई पडते है। इसीलिए आज सामान्य भारतीय युवा पीढी के मन मे न तो इस राष्ट्र के प्रति न इसकी गौरवशाली समृद्ध परम्परा के प्रति और न इसके स्पृहणीय अतीत तथा वाछनीय सुखद भविष्य के प्रति सम्मान है न ही कोई आशा।

वस्तुत. दोष युवा पीढी का ही नहीं है। आज हमारी सारी की सारी मान्यता पश्चिम द्वारा प्रदत्त ही तो है। हमने टैगोर को तभी श्रेष्ठ माना जब उन्हे वाह्य विश्व ने मान्यता दी। हमसे सस्कृत साहित्य को तभी श्लाघनीय मानना सीखा जब मैक्समूलर और मोनियर विलियम्स ने उसे खगाला। हमने कालिदास को तभी जाना जब गेटे ने उसकी प्रशसा मे गीत गाये। यह सूची पर्याप्त लम्बी है। इस सबका मूल कारण हमारी धार्मिक और सामाजिक संरचना में भी विद्यमान है। शायद इसीलिए आज भी हमारे शोध कार्यों के प्रतिमान पाश्चात्य विश्वविद्यालय और उनके प्रकाशन तय करते है। सम्भवत. यही कारण है कि हमारे राजनीति विज्ञान के अधिकाश शोध पाश्चात्य राजनीतिक चिन्तन, राजनीतिक व्यवस्था और सस्थाओ पर ही आधारित रहे है। हममे से बहुत कम लोग जानते है कि संसदीय प्रणाली मे शक्ति-पृथक्करण का जो सिद्धान्त हमें मान्टेस्क्यू द्वारा प्रदत्त बताया और पढाया जाता है, वह वस्तुतः ऋग्वेद की सभा और समिति की अवधारणा मे मौजूद है। लोकतंत्र की अवधारणा हमारे यहाँ कितनी दृढ़ और सुस्पष्ट थी इसका अन्दाजा लगाना बहुत आसान है। संसार के प्राचीनतम गणतंत्र यहाँ विद्यमान थे। महाकवि कालिदास के विश्वविख्यात नाटक "अभिज्ञानशाकुन्तलम्" मे एक कन्चुकी जैसा साधारण पात्र कहता

है—अविश्रमोऽय लोकतत्राधिकार.—अर्थात लोकतंत्र का यह अधिकार समान रूप से सबको प्राप्त है। समानता का यह विचार मूलत. भारतीय सांस्कृतिक गहनता की स्वाभाविक देन है। राजा दुष्यन्त घोषणा करता है कि "पाप को छोडकर वह प्रजा के समस्त बन्धु-कृत्यो का सम्पादन करेगा और उनके सुख-दुख मे बराबर का भागीदार होगा।" कार्य-पालिका के उत्तरदायित्व की यह कैसी अनूठी परिकल्पना है।

प्लेटो के न्याय सिद्धान्त मे कार्य-विशिष्टीकरण तथा अहस्तक्षेप को महत्त्वपूर्ण उपादान माना गया है। महर्षि व्यासकृत श्रीमद्भगवदगीता मे श्रीकृष्ण स्पष्ट रूप से यह कह चुके है—"योग कर्मसु कौशलम्" योग कर्म मे कुशलता का नाम है। व्यक्ति के समष्टिगत दायित्व-बोध को इससे अधिक साफ-शब्दों मे किसने व्यक्त किया है। श्रीकृष्ण कहते है—स्वधर्मे निधन श्रेय. परधर्मो भयावह —अर्थात् अपने कर्त्तव्य के पालन मे मृत्यु भी श्रेयस्कर है परन्तु दूसरे के दायित्व मे हस्तक्षेप भयावह है। पाश्चात्य राजनीतिक चिन्तन मे प्राय कहा जाता है—एक सन्तुष्ट सुअर से असन्तुष्ट सुकरात होना श्रेष्ठ है इसे भारतीय मनीषी कहता है—

"मनस्वी म्रियते कार्य कार्पण्यं न तु गच्छति"।

चाहे मनस्वी व्यक्ति को मरना क्यो न पडे वह कायर नही बन सकता। आदि कवि बाल्मीकि कृत रामायण मे भी राम के यौवराज्याभिषेक के समय, सुग्रीव द्वारा राम-लक्ष्मण की सहायता के प्रस्ताव के समय, रावण द्वारा मारीच से सहयोग मागने के समय तथा अन्य कुछेक अवसरो पर सन्तुलित विचारवान तथा प्रजाहितकारी राजनीतिक विचार-विमर्श दिखाई पडते है। महाभारत के आदिपर्व, शान्तिपर्व, विराटपर्व आदि मे सुविकसित तथा सुसम्पन्न राजनीतिक व्यवस्था और सस्थाओ के दर्शन होते है। विदुर नीति राजनीतिक नेतृत्व और प्रजा के सम्बन्धो के निर्धारण मे मानक बिन्दु का काम करती है। शुक्रनीति एक विस्तृत अन्तर्राष्ट्रीय सन्दर्भ तथा कुशल परिप्रेक्ष्य मे उपादेय सिद्ध होती है। कामन्दक का नीतिसार कार्यपालिका और विधायिका की प्रकार्यात्मक संरचनात्मक आधारभूमि तैयार करता है। चाणक्य के अर्थशास्त्र को पढ़ने से ज्ञात होता है कि उससे बहुत पहले गुप्तचर व्यवस्था, दण्ड-विधान, सैन्य प्रणाली आदि विषयो पर भारद्वाज, पराशर, पिशुन, कौणप-दन्त, वातव्याधि, विशालाक्ष तथा बाहुदन्तीपुत्र जैसे आचार्यो ने विस्तारपूर्वक लिखा था और उनके विचार तथा तर्क अलग-अलग मान्य सिद्धान्तो के रूप मे स्थापित हो चुके थे। इसीलिए कौटिल्य उन सिद्धान्तो का जिक्र करने के साथ-साथ उनमें समय के अनुसार तथा युग की माँगो के अनुरूप परिवर्तन भी करना चाहता है।

राज्य, व्यक्ति, व्यवस्था, धर्म, अर्थ आदि को धार्मिक, आध्यात्मिक तथा सामाजिक तन्तुओ से भारतीय परम्परा मे इसीलिए जोड़ दिया गया ताकि राज्यनीति सवेदनशून्य न हो जाये, व्यवस्था हृदयहीन न बन जाये, अर्थ अनीतिमार्गी न बन जाये, व्यक्ति स्वार्थी न होने पाये और राज्य अनुत्तरदायी व स्वेच्छाचारी न हो सके। हमारी आधुनिक शिक्षा

पद्धति ने इस परम्परा तथा सामाजिकता के मूल विन्दुओं को खोजने और समझने के प्रयास को हेय कार्य बना डाला और इसीलिए हमने धर्म, सस्कृति, परम्परा और उपासना पद्धति मे अन्तर करने और समझने की चेष्टा तक नहीं की। बहुत आसानी मे भारतीय साहित्य, इतिहास तथा नीतिशास्त्र को हिन्दू धार्मिक रचनाएँ कहकर उनकी सप्रयोजन उपेक्षा की गई और पश्चिम के चश्मे से देखने वाले हमारे बुद्धिजीवी इसे सत्य मानकर बैठ गये। तभी तो नाट्यशास्त्र पर लिखने-पढने वाले हमारे लेखक, साहित्यकार भरतमुनि को जाने-बिना फ्रांस, इटली, रोम आदि के नाटककारो पर सेमीनार कराते है, पत्रिकाओ के विशेषाक निकालते है। उन्होने भास, भवभूति, कालिदास को तो नही पढा है। क्योकि यह सब सस्कृत मे है। परन्तु ब्रेढत, मोपान्सा, शैक्सपीयर आदि के विशेषज्ञ वन बैठे है। इसीलिए हमारे राजनीति विज्ञान के आचार्यगण डेविड ईस्टन, लास्की, लूसियन पाई तथा सिडनी वर्बा पर तो सैकडों शोधपत्र लिखकर प्रकाशित कराते रहते है, परन्तु पुरातन भारतीय राजनीतिक चिन्तन की वीथियो मे उन्हें झाकने की भी फ़ुरसत नही है।

प्राय. राजनीति विज्ञान के आचार्यों-उपाचार्यो का तर्क होता है कि भारत ब्रिटिश आक्रमण से पूर्व एक राष्ट्र था ही नही, अपितु छोटे-छोटे टुकडो मे बँटा एक प्राकृतिक भू-खण्ड था। उसका कोई झण्डा नही था, संविधान नही था। पहली बात तो यह है कि राष्ट्र की अस्मिता झंडे या संविधान की मोहताज नही होती। राष्ट्र एक भौगोलिक-राजनीतिक शब्द नही है अपितु भावात्मक सज्ञा है। राष्ट्र नागरिको के पहचान-पत्रो से नही अपितु उनके संवर्गों तथा उनकी सहज सम्पृक्ति से बनता है। यदि भारत राष्ट्र नही था तो— "वय राष्ट्रे जागृयाम पुरोहिता" अथवा—"अहं राष्ट्री सगमती वसूनाम्" की उद्घोषणा आर्ष-ग्रन्थो मे क्यो मिलती है। यदि भारतवर्ष एक राष्ट्र नही था तो क्यो कहा जाता था– "कृण्वन्तो विश्वमार्यम्"।

मूलत. इस प्रकार के तर्क अपनी स्वाभिमानशून्यता के परिचायक है। सस्कृत साहित्य मे इसके सहस्रों प्रमाण उपलब्ध है कि सस्थागत आधारो पर विभिन्न क्षेत्रीय उपशक्तियों मे बँटा होने के बावजूद भारतवर्ष विचार, आस्था, विश्वास, समर्पण आदि की दृष्टि से एक सुदृढ राष्ट्र था। भारत की इस अवर्णनीय गौरवगाथा के राजनीतिक-सामाजिक लाभ कमाने मे स्वतन्त्रता से पूर्व अग्रणी राजनीतिक दल ही आज इसे कपोल-कल्पना तथा प्रतिक्रियावाद और फासीवाद जैसे शब्दो से अभिहित करते है तो इसमे उनकी स्वार्थपरता ही अधिक दोषी है।

प्रस्तुत लघु-निबन्ध का उद्देश्य राजनीति और उससे सम्बद्ध विषयो का विवेचन न होकर इतना इंगित करना है कि भारतीय राजनीतिक चिन्तन को हिन्दू विचारधारा कहने का पूर्वाग्रह छोड दिया जाये। निरपेक्ष, निष्पक्ष, विश्लेषणात्मक तथा वैज्ञानिक दृष्टि से इस चिन्तन के मूल स्रोतों तथा आधारभूमि का पता विस्तृत तथा सुनियोजित शोध के माध्यम से लगाया जाये। प्रयोजित इतिहास तथा तथ्यो को एकागी प्रस्तुति के दोषो से बचते हुए

तथा भारतीय मनीषा को उपेक्षणीय न मानते हुए सम्यक् रूप मे इसका विशद विवेचन किया जाये । सम्भव है कि भारत की वर्तमान सामाजिक राजनीतिक समस्याओ से समाधान हमारी अपनी मिट्टी और पानी मे ही मिल जाये । राजनीतिक-विज्ञान के क्षेत्र मे गम्भीर शोधकार्य इस दिशा मे हो सके यही प्रस्तुत निबन्ध का उद्देश्य है । यह एक अनुरोध भी है और आमन्त्रण भी ।

ABSTRACT

'Research in Political Science on Indian Aspect'

The students of Political Science are generally, taught the primary maxim—'Political Science begins with the Greek'. But this altogether neglects the Indian contribution to the field of knowledge. Indian writings of pre-historical period have never been given due importance in the narration of philosophical chronology. Therefore, the paper makes an attempt to bring forward a few major political thinkers in perspective of modern political institutions The paper very emphatically points the way for further research in ancient Indian political thought which is necessary Equipped with all the pre-requisites of modern society and the solutions of the problems of this complex social structure are also inherent in this field.

--Sanjeev Kumar Sharma

★

सोने के पहले, तुम कुछ क्षण के लिये एकाग्र होकर अभीप्सा करो कि यह निद्रा तुम्हारी थकी हुई नसो को पुन: शक्ति प्रदान करे, तुम्हारे मस्तिष्क में स्थिरता और शांति लाये, ताकि सोकर उठने के बाद तुम नये उत्साह के साथ इस महान उपलब्धि की ओर अपनी यात्रा को फिर से आरंभ कर सको ।

हर क्षण प्रगति का अवसर

हर क्षण प्रगति करने का अवसर होता है। तुम अपनी प्रगति को धीमा क्यो करना चाहते हो ? भगवान से अच्छा स्वास्थ्य या लम्बा आयुष्य मागने मे कोई हर्ज नही है। भगवान् से कोई चीज छिपाने की जरूरत नही है। "नही, नही, मै उनसे भौतिक चीजे क्यो मांगू ?" यह एक और तरह का अहकार है। अगर यह तुम्हारे अन्दर हो तो मूर्खतापूर्ण है। वे सर्व-करुणा-सम्पन्न है, वे ही तुम्हारे सबसे निकट और सबसे अधिक प्रिय है। अगर तुम उनसे नहीं मागोगे तो मांगोगे किससे ? बहुत-से लोग है जो भगवान् से चीजो को छिपाते है, उनके अहंकार का कोई भाग मना करता है—नहीं मै भगवान् से कुछ नही मागना चाहता, मानो इससे वे भगवान् की कुछ सहायता करते है ! तुम्हारी कोई भी समस्या क्यो न हो, मान लो कि तुम्हारा कोई मित्र बीमार है—तो सबसे अच्छा उपाय यह है कि पूरी सच्चाई के साथ अपनी समस्या भगवान् के आगे रख दो। तो भगवान या तो तुम्हारे मित्र को अच्छा कर देगे या तुम्हारी दृष्टि को बदल देगे। एक बार तुम्हारी दृष्टि बदल जाये तो तुम्हारे लिये समस्या का समाधान हो जाता है, हो सकता है कि भगवान् तुम्हे बतला दे कि यह बीमारी क्यो आयी है, वह क्यो जरूरी है। तुम्हारे लिये सारी समस्या का हल हो जाता है। यह निश्चित है।

S. M. Gupta

EFFECT OF SOCIAL CLASS STATUS ON CREATIVE ABILITY OF STUDENTS

Recent investigations hold that for centuries the common idea had been that only the exceedingly rare person is genuinely creative and that creativity is a divine gift for a few only. This concept of creativity has been subjected to myriad interpretation. For many, it has long been regarded as a special endowment bestowed upon a very few, a special talent that cannot be induced unless the hereditary limits are not present

But psychologists have been now postulating the existence within each individual of an essentially biologically based inner nature propelling him towards growth of all abilities including creativity which they possess to different degrees.

There is considerable agreement among a number of writers too that everyone is born with an endowment of awareness and creative attitude seems to have been built into the species. In the 1962 ASCD Year-Book, it is state :

> "Creativity is in each of all,....... This idea is comforting in that it gives us a measure of hope as we work with individuals it is disturbing in that it points up how much we have yet to learn about this intangible and illusive phenomenon".

Creativity became an object of scientific study primarily because of the general interest in individual differences. This approach recognizes that individuals differ psychologically in traits or attributes that can be conceived

Dr S M. Gupta is Reader in Department of Education, Kurukshetra University, Kurukshetra

as continua or dimensions—that there can be varying degrees of a quality possessed by different individuals.

Educators have long been concerned with developing and nurturing creativity. Perhaps what is new is the growing realization that creative potential is not something confined to a gifted few only. Increasingly, it is being recognized that creativity is a normally distributed human potentiality. Evidence seems to support that no one is without creative potential, when we talk about creative behaviour we refer to everyman rather than to an uncommon man. This feeling has been corroborated by Gowan, Demos and Torrance (1967), Steinberg (1964), Guilford (1962), Passi (1971) and Ahuja (1975) This conception has opened the door to many kinds of researches.

The relationship between creativity and socio-economic and cultural mileu have been very important to understand nature, nurture and utilisation of creativity. Development of a child is influenced by his genetically determined potentialities and his total environment. The nature of the interaction and their modifying effects on the child are determined by the umpteen environmental factors. The following broad environmental factors may be noted for bringing up differentiating creative abilities in children—(i) cultural and familial social status, (ii) economic and educational possibilities, (iii) child rearing practices, (iv) child's sex, and (v) his individual status in the family.

These environmental factors have greater influence on the activity of different sections of the students who are brought up in different localities. The cultural and social status, economical-educational possibilities and child rearing practices in the so called high caste (advantaged) and low caste (disadvantaged) groups are entirely different so that creative development of the children is affected by these factors

Ogletree and Ujliki (1973) reported a positive correlation between social class status and creativity. The creativity scores of the upper class were significantly higher than those of the middle and lower class samples (the only exception being figural flexibility where the differences were not significant). Sharma and Jarial (1980), also found a positive and satistically significant correlation between creativity and socio-economic status. However, Chadha and Sen (1981), reported no significant relationship between creativity and socio-economic status. Straws and Straws (1968) making a wider cross cultural study observed six differences in American and Indian student population. In both societies, boys were significantly

more creative than girls They further found that gaps were wider in Indian students than Americans

It has been seen that may talented pupils belong to rural areas and disadvantaged groups, but because of lack of proper social recognition, they are neglected in the society. The higher educated pupils are restricted within the limits of so called socially privileged classes

The present study, therefore, tries to show clearly if there is any positive significant relationship between creativity and social class of pupils.

OBJECTIVES

1 To study the creativity among advantaged disadvantaged senior secondary boys and girls belonging to urban and rural areas

2. To find out the differences, if any, in creativity, of advantaged and disadvantaged students.

3 To find out the differences, if any, in creativity of students from urban and rural areas

4. To find out the differences, if any, in the creativity of boys and girls of senior secondary stage.

5. To study the two factor, and three factor interactions between social class, locality and sex in relation to creativity

HYPOTHESES

On the basis of review of related studies, following null hypotheses were formulated—

1. There will be no significant differences in the creativity of advantaged and disadvantaged groups of senior secondary students.

2. There will be no significant difference in the creativity of urban and rural students.

3 There will be no significant difference in the creativity of boys and girls of senior secondary stage.

4. There will be no two factor and three factor inter-actional effects between social class, sex and locality when creativity is dependent variable.

THE SAMPLE

A sample of 160 XI grade students of five senior secondary schools of Kurukshetra district of Haryana were selected by stratified random sampling technique.

The sample consisted of 56 students belonging to disadvantaged sections viz. scheduled caste and backward classes, while the remaining 104 students were from advantaged sections (high castes) of the society. Further, 90 students (60 boys and 30 girls) were from urban areas and 70(44 boys and 26 girls) were from rural areas.

METHOD

Basantis Remote Associate test was used to collect the requisite data. It is a standardised test and consists of 45 items Each item consists of three different words and the student is asked to add only one new word in each group which is common to three words and in combination with each other word makes it meaningful. An answer sheet is attached with the test to write the appropriate word. The test is completed in approximately one hour. It has one dimension, that is, fluency

After administration of the test to the students the response sheets were hand scored. One point was given to each item correctly answered. The total number of correct responses were counted to get the total creativity score

ANALYSIS OF DATA

There was one dependent variable in the study i e. creativity and three independent variables—social class, sex and locality. Each of these three variables had two levels each viz—

Social class	(A)—Disadvantaged (S C and B.C) and Advantaged (High Castes).
Sex	(B)—Boys and Girls
Locality	(C)—Urban and Rural.

So, $(2 \times 2 \times 2)$ three way Analysis of variance technique was used to analysed the data

The number of students in various cells of the factorial design was not equal and the minimum number of students in any cell was 12.80, the

number of students in other cells was also made equal to 12 by rejecting the excess number randomly Thus, 96 students' creativity scores were taken into consideration for computation purpose

The mean creativity scores of the students followed by summary of analysis of variance are given in Table 1 and 2 respectively

TABLE 1

Mean Creativity Scores Students belonging to different Social Classes, Sex and Locality

(N=96)

	Advantaged		Disadvantaged	
	Boys	Girls	Boys	Girls
Urban	27 00	17 83	11 75	10 00
Rural	16 00	12 83	9 92	8 17

TABLE 2

Summary of Analysis of Variance on Creativity Scores in Relation to Social Class, Sex and Locality (N=96)

Sources of Variance		df	SS	MS	F-ratio	Significance Level
Social Class	(A)	1	1507.48	1507 48	51.05	$p<.01$
Sex	(B)	1	246.57	246 57	8.35	$p<.01$
Locality	(C)	1	430.25	430.25	14.57	$p<.01$
A×B		1	74 72	74 72	2.53	n s.
A×C		1	177.77	177.77	6.02	$p<.05$
B×C		1	36.32	36 32	1.23	n.s.
A×B×C		1	35.44	35 44	1 20	n.s
Within		88	2598 64	29.53	—	—
Total		96	5107.19			

n.s.—not significant at .05 level.

DISCUSSION OF RESULTS

1. F-ratio for main effect of social class we found to be significant at .01 level. Ho can not be retained. The mean creativity scores show that advantaged group students (M = 18.42) are more creative than disadvantaged students (M = 9.96). Thus, social class of the students influences their creative potentialities. Family status, environment position and child care of scheduled caste and backward class students is such which hampers their creative potentialities.

2. F-ratio for main effect of sex came out to be significant at 01 level. Ho can not be retained. The mean creativity scores show that boys (M=16 17) are found to be more creativity than girls (M=12.21) It signifies that girls are being discriminated and have less congenial environment as compared to boys so that they find less chances of showing their creative potentialities.

3. F-ratio for main effect of locality was found to be significant at .01 level. Ho is rejected The mean scores show that urban students (M=16.65) are creative than rural students (M=11 73) The cultural and social status, economic and educational facilities and child rearing practices in urban and rural areas are entirely different. Rural students need upliftment in these facilities for development of their creative potentialities.

4. F-ratio for two factor interactions--B × C (sex × locality), A × B (social class × sex), and triple interaction A × B × C (social class × sex locality) were not found to be significant. However A × C (social class × locality) interaction was found to be significant at .05 level. It shows that differences in creativity of students of different social classes were not of the same form for different levels of locality It means that the differences in creativity of advantaged and disadvantaged students depended upon the locality to which they belonged The mean creativity scores shows that upper caste students beloging to urban areas are most creative (M=22.42), while scheduled caste and backward class students belonging to rural areas are least creative (M=9 05). It signifies that rural students belonging to scheduled caste and backward classes are most discriminated and find least congenial environment and social status which hinder the development of their creative abilities

To conclude, scheduled caste and backward class students, girls, and students from rural areas lack creative abilities in comparison to their counterparts from high castes, boys, and urban students. Their social status,

environmental conditions, child rearing practices and methods of teaching must be improved to assist them in developing their creative potentialities.

REFERENCES

Ahuja, G C "On Creativity" *Quest. in Education*, XII(2), 1975, pp. 97-103.

Association for Supervision and Curriculum Development (ASCD). *Perceiving, Behaving Becoming*, Washington, D C , ASCD, 1962

Chadha, N. K. and Sen, A. K. "Creativity as a Function of Intelligence, Socio-Economic Status and Sex among the 12th Grade Schools Students" *Journal of Educational Psychology*, 39(1), 1981, pp. 52-56.

Cheek, J P. "An Analysis of Differences in Creativity Ability Between White and Negro Studies", *APA Experimental Publication System*, 1970.

Gowan, J C., Demos, G. D & Torrance, E. P , *Creativity Its Educational Implications*, New York : John Willey, 1967.

Guilford, J P. "Factors that Hid-d and Hinder Creativity', *Teachers College Record*, 65, 1962, pp 380-392

Jarial, G S. "Verbal Creative Thinking Among the Students with Different Socio-economic Status Background and Birth Order",

Psycho-Lingna, 9(2), 1979, pp. 85-90.

Mednick, A "The Associative Basis for Creative Process", *Psychological Review*, 1962, pp 220-232

Ogletree, E. J. "Effect of Social Class Status on Tests of Creative Behaviour", *The Journal of Edn. Res.*, 67(4), 1973.

Sharma, A. K , Jarial, G S "Factorial Study of the Effect of SES, Grade Levels and their Interaction upon Creativity and its Components", *Trends in Education*, 7(1), 1980.

Steinberg, L Creativity as a Character Trait . An Expanding Concept", *California Journal of Instructional Improvement*, 7, 19.4, pp. 3-9

Straws, M. D., Straws, M. A. "Family Role and Sex Differences in Creativity of Children in Bombay and Metropolitis", *Journal of Marriage and the Family*, 30(1), 1968, pp. 46-53.

सारांश

विद्यार्थियों की सामाजिक श्रेणी स्थिति का उनकी सृजनात्मक योग्यता पर प्रभाव

प्रस्तुत शोध पत्र का उद्देश्य विद्यार्थियो की सामाजिक स्थिति और उनकी सृजनात्मक योग्यता मे सम्बन्ध ज्ञात करना है। इसमे नगरीय व ग्रामीण क्षेत्रो के उच्च और निम्न सामाजिक श्रेणी के छात्रो व छात्राओ की सृजनात्मक योग्यता मे अन्तर, एवं सामाजिक श्रेणी, लिग व निवासस्थान का सृजनात्मक योग्यता पर अन्यान्य प्रभाव का अध्ययन किया गया है।

स्तरित यादृच्छिक प्रतिचयन विधि द्वारा कुरुक्षेत्र (हरियाणा प्रान्त) जिले के ५ वरिष्ठ माध्यमिक विद्यालयो की एकादश कक्षा से १६० विद्यार्थी चुने गए। इनमे से ५६ निम्न श्रेणी (अनुसूचित जाति और पिछडी श्रेणी के थे, जबकि १०४ उच्च सामाजिक श्रेणी से थे। नगरीय क्षेत्र से ९० (६० छात्र व ३० छात्राएँ) तथा ग्रामीण क्षेत्र से ७० (४४ छात्र व २६ छात्राएँ) विद्यार्थी इस प्रतिदर्श मे चुने गए। बसन्ती द्वारा निर्मित 'परोक्ष सहयोगी परीक्षण' द्वारा दत्त सग्रहण किए गए।

इस अध्ययन में तीन स्वाधीन चर-सामाजिक श्रेणी, निवास स्थान व लिंग थे जिनका प्रभाव सृजनात्मक योग्यता पर देखा गया। इसके लिए (२ × २ × २) प्रसरण विश्लेषण विधि द्वारा दत्तो का विश्लेपण किया गया।

मुख्य निष्कर्ष इस प्रकार है—

१. सामाजिक श्रेणी का सृजनात्मक योग्यता पर प्रभाव सार्थक आया। उच्च श्रेणी के विद्यार्थियो मे सृजनात्मक योग्यता निम्न श्रेणी के विद्यार्थियो से अधिक पाई गई।

२ लिग का प्रभाव सृजनात्मक योग्यता पर सार्थक आया। छात्राओ की अपेक्षा छात्रों मे सृजनात्मक योग्यता अधिक पाई गई।

३ निवास स्थान का प्रभाव सृजनात्मक योग्यता पर सार्थक आया। नगरीय विद्यार्थी ग्रामीण क्षेत्र के विद्यार्थियो की अपेक्षा अधिक सृजनात्मक पाये गये।

४. सामाजिक श्रेणी निवास स्थान का अन्यान्य प्रभाव सार्थक आया। इससे ज्ञात हुआ कि उच्च व निम्न श्रेणी के विद्यार्थियो की सृजनात्मक योग्यता मे अन्तर

उनके निवास स्थान पर निर्भर करता है। नगरीय क्षेत्र के उच्च श्रेणी के विद्यार्थी सर्वाधिक सृजनात्मक पाये गए, जबकि ग्रामीण क्षेत्र के निम्न श्रेणी के विद्यार्थी सबसे कम सृजनात्मक थे।

इस प्रकार प्रस्तुत अध्ययन मे ज्ञात हुआ कि निम्न सामाजिक श्रेणी के विद्यार्थी, ग्रामीण क्षेत्र के विद्यार्थी एव छात्राएँ अन्य वर्गों की अपेक्षा कम सृजनात्मक है। उनकी सामाजिक श्रेणी पर्यावरण स्थितियो, बच्चों को पालने की प्रथाओं और शिक्षण विधियो मे सुधार की आवश्यकता है जिनसे वे भी नगरीय क्षेत्र के उच्च सामाजिक श्रेणी के छात्रो के समान सृजनात्मक हो सके।

सुरेन्द्रमोहन गुप्त

★

बढ़ते जाओ

ऐसे युवक है जो बूढे है और ऐसे वृद्ध है जो युवक है। अगर तुम अपने अन्दर प्रगति और रूपान्तर की यह ज्वाला लिये रहो, अगर तुम सब कुछ अपने पीछे छोड़ने के लिये तैयार हो ताकि तुम चौकस कदम के साथ आगे बढ़ सको, अगर तुम हमेशा एक नयी प्रगति, एक नये विकास, नये रूपान्तर के लिये खुले रहो तो तुम सतत युवक रहोगे। परन्तु यदि तुमने जो कुछ प्राप्त कर लिमा है उससे सतुष्ट होकर बैठ जाओ, अगर तुम्हें अनुभव हो कि तुम अपने लक्ष्य तक पहुच गये हो और अब करने के लिये कुछ बाकी नहीं है, बस अपने प्रयासो का फल भोगना है तो तुम्हारा आधे से अधिक शरीर कब्र मे पहुच गया · यह जर्जरता और सच्ची मृत्यु है।

जो कुछ भी किया जा चुका है वह उसकी तुलना मे कुछ भी नही होता जो करना बाकी है।

पीछे मत देखो, सामने देखो, हमेशा सामने देखो और सता आगे बढते जाओ।

—श्रीमां

समृद्धि और शक्ति

अगर तुम व्यापारी हो तो भगवान् चाहते तो है कि तुम समृद्ध बनो, लेकिन तुमको यह न मान लेना चाहिये कि यह धन तुम्हारा है और तुम धन के दास भी न बनो। अगर तुम धन के दास बन जाओ तो यह खतरनाक बात है। तुम्हे यही मानना चाहिये कि धन भगवान् का है।

एक समृद्धि की शक्ति होती है, एक रोग-मुक्ति की शक्ति होती है, अन्य बहुत प्रकार की शक्तिया होती है। सरस्वती सुव्यवस्था की देवी है परपरा के अनुसार वह विद्या की देवी मानी जाती है परन्तु तत्त्वत वह सगठन और काम में पूर्णता की देवी है। अगर तुम्हारे अन्दर सरस्वती का अवतरण हो (माताजी कहा करती थी कि सरस्वती ही प्राय. उनके काम के सामने आया करती है) और अगर यह शक्ति तुम्हारे अदर विकसित हो तो जब तुम किसी आदमी को देखोगे तो उसके बारे मे सब कुछ जान जाओगे, उसकी नियति क्या है, उसे क्या करना चाहिये और वह क्या ज्यादा अच्छी तरह से कर सकता है। तुम लोगो को उनके ठीक स्थान पर रख सकोगे। इस शक्ति के बिना केवल अस्त-व्यस्तता होती रहेगी, जैसी कि अब है। हम चीजो को हमेशा अपनी दृष्टि से देखते है—इससे मुझे क्या हानि या लाभ होगा—हम इसीके अनुसार निश्चय करते है। यह कभी ठीक नही हो सकता। हम अपने तथा औरो के जीवन मे गडबड कर बैठते है। पूर्ण जीवन-यापन करने के लिये ठीक तरह का ध्यान एक सशक्त उपाय है। ध्यान द्वारा अपनी क्षमताओं को विकसित करके हम अपने जीवन को सफल, प्रगतिशील, संगठित बना सकते है। औरो की सहायता करने का यह सबसे अच्छा तरीका है।

Beena Shah & Radha Dua

DROPOUT & SCHOOL ; AN OVERVIEW

Education is the key for the progress of a nation. It makes natural development of child's innate powers Whatever mankind has achieved in various domain of progress, in one way or the other, is related to the educative process After independence, not only the necessary provisions were made in the constitution but attempts are being made to make education available to every educable citizen irrespective of caste, creed, religion and sex.

Huge amounts of funds are being spent by the govt on the spread of literacy all over India. Parents admit their children to the primary classes with great enthusiasm, but strangely many students leave the school before completing the required course Thus, problem of dropout is still very serious and alarming even after applying several measures by the govt. as recommended by various commissions and committees from time to time. Researchers have also made efforts to know the causes of dropout related to school and also the measures to reduce the dropout. Here an effort has been made to review the causes of dropout related to school and other correlated factors.

It seems paradoxical that for educational advancement, we are introducing various kinds of innovations in teaching-learning process, whereas on the other hand, the most disturbing problem—school dropout, is not reducing to the considerable extent. In Indian context, the problem of wastage and stagnation was highlighted for the first time by the Hartog Committee in

---

Dr. Beena Shāh is the Professor, Head & Dean, Faculty of Education, Rohilkhand University, Bareilly—243001

Dr Radha Dua is a Lecturer, Deptt. of Education, Rohilkhand University, Bareilly—243001

1928. The firstever, study of this problem seems to have been undertaken in 1940 by the Bombay Provincial Board of Primary Education in erstwhile Bombay Province. Since then, several studies were conducted by several institutions and individuals for identifying the extent and causes of wastage and stagnation and suggested remedial measures. The overview of research findings reveals that a number of variables related to the school machanism had influenced the dropout phenomenon significantly.

1. SCHOOL PHYSICAL FACILITIES

Das (1974) conducted a study to ascertain whether there was any impact of the infrastructural facilities of the primary schools on the retentivity and regular educational progress of its children. The study revealed a significant relationship between efficiency in education and physical facilities in school A National workshop and Symposium on Non-Formal Education for school dropouts and youth (the age group 6-14) 1975; concluded that lack of adjustment to school and lack of facilities are important reasons to dropout. Bose and Mukherjee (1971) also reported similar findings. Barua (1971) identified bad physical conditions of school, over-crowded class room, lack of teaching aids also as causes of dropout. On the other hand, Srivastava and Gupta (1980) found that there was no significant relationship between school facilities and non-attendance. Further Sri Avinashlingum (1970) concluded that the parents of his sample (school going girls and dropout girls) expressed dissatisfaction towards the prevailing school conditions which repel children for studying in such schools

2. DISTANCE OF SCHOOL

Longer distance between home and school also enhance the dropout rate (Srivastava and Gupta 1980). Manuel et. al. (1960) observed that the distance of school from home in rural areas was a handicap and a positive significant relationship was found between the nearness of school and achievement in English. Similarly, Goel (1968) concluded that non-provision of schools at more places is a significant determinant of dropout Further, Shastri (1977) revealed that because of rugged terrain and large number of smaller villages, the number of schools at the primary level are greater in Kaumun as compared to the Uttar Pradesh aggregate, but even then incidence of rural dropout was very high. Because the school being too for away and conveyence facilities were also not available to the students, resulted in higher dropping out (Rebello 1978). Further, Shah (1992) and Asthana (1993) found that dropout students reported that due to problems

in reaching their schools because of longer distances between home and school, they were compelled to discontinue their education.

3. TEACHER

Teacher is one of the significant variable for school dropout (Pillani 1977, Asthana 1993). Rough and unsympathetic behaviour of teachers enhance the dropout rate (Barua 1971). Similarly, Srivastava and Gupta (1980) concluded that discouraging attitude of teachers resulted in dropping out Bose and Mukherjee (1971) observed that stagnation in collegiate education was due to dearth of competent teachers and their inadequate attention to students. Whereas, in Karnataka the rate of wastage was positively related to pupil—teacher ratio (Kashinath 1980). In single teacher schools, a higher dropout rate was obtained by Barua (1971) Similarly, Hussain (1982) reported that mostly single school teachers had to teach the students of classes Ist to Vth altogather and due to providing inadequate attention to the students of each class resulted into higher wastage and stagnation. Whereas. Reilly (1976) found that the parents of his sample felt that the teacher-counsellor were not free to talk over problems Teacher-Counsellor's loss of interest was found as a significant reason for dropping out Contrary to it, Rath and Mishra (1974) concluded that scheduled caste students did not feel neglected by their teachers

4 METHOD OF TEACHING

Regarding methods of teaching Alvi (1965) reported that ineffective methods of teaching caused dropout. Whereas, Joshi (1978) in his study "Expansion of Ungraded Unit Teaching System : Evaluation and Results" found that the use of new methods had practically no effect in solving the problem of wastage and stagnation in rural and urban schools.

In brief, it can be summed up that teacher and teaching methods also have significant role in continuity or discontinuity of studies by the students

5 CURRICULUM

Study conducted by SIE (1969) concluded that educational system was not according to the needs of the society. Similarly Srivastava and Gupta (1980) arrived at similar findings that the education was not related to life and the dull curriculum caused children to dropout. Similar results were reported by Masavi (1976) and Rebello (1978). Further Shah (1983) observed that too heavy curriculum forced pupils to leave the school. Later

Shah (1991) and Asthana (1993) found that uninterested contents and curriculum forced the children to discontinue their studies, Thus the courses are also identified as an effective determinant of dropping out phenomenon

6 DIFFICULT SUBJECTS & FAILURE IN EXAMINATION

Adiseshiah and Ramanathan (1974) in a study of educational problems of scheduled caste and scheduled tribes found that SC & ST students put 3-4 hours extra, study even then they find it difficult to follow the curriculum. Whereas, Kamat and Deshmukh (1963) studie wastage among college students. They noticed that 40 % of the wastage was found in case of Science stream students. English was identified as a subject in which nearly 70% of the students failed Bokil (1963a) also noticed that failures were in English A study conducted by DEPSE (1964) concluded that largest number of failures were in English and Maths. Whereas, CCPI Allahabad (1964) arrived at the conclusion that performance in English, Maths, Science and Civics were found responsible for higher incidence of failure.

Further, Gangopadhyoya (1985) determined the extent of wastage and stagnation at secondary school level among boys and girls in Udaipur (Rajasthan) and in Libera The main cause for wastage and stagnation was apathy towards English and disliking for Maths. Majority of the students dropped out due to failure in Maths (Patel and Dewan 1981). Asthana (1992) reported that dropout students of her sample identified Maths. English, Science and Social studies as the subjects in which they usually failed. Consistent findings were obtained in case of tribal students (Shah 1992, Lakhera 1986). Further, Devi (1983) revealed that repeated failures in examination were causing dropout. Asthana (1993) also arrived at the conclusion that adjustment with examination is a prominent determinant of dropping out. Phadke and Shukla (1983) reported that as compared to commerce stream, the dropout rate was found higher among the students of Arts stream.

7. TIME TABLE, HOME WORK & TUITION FACILITY

Mathur et. al. (1982) focussed on dropouts analysed that inconvenient time table was responsible for usual absence in the schools as well as for the withdrawl of the students from the school. Further, Pratap and others (1971) observed that highest absenteism was observed in January, February, April and October. This is related with the time of agricultural operations. The govt. schools showed the highest wastage. Further, Sujatha (1980) also

arrived at the similar findings that there was sharp fall in attendance during agricultural and rainy seasons. Whereas, Asthana (1993) reported that school time table can not be considered as a cause or dropout. Shah (1992) on the basis of the opinion of students and parents has suggested most convenient timings as 7 am to 12 30 p.m. and 10 a m. to 4 p.m for summer and winter seasons respectively.

In connection with completing homework, Raj Gopalan (1974) revealed that domestic work created a problem for the children and created a hindrance for the children in doing their homework. The dropout students reported more problems with the homework. Asthana (1993), Shah (1992), Lakhera (1955) also reported that due to poor educational background and lack of encouragement from parents, usually students did not complete their homework. Tear of punishment by the teacher and humilation by the classmates, were found as the important causes for leaving the school.

Regarding tution facilities, Lakhera (1985) concluded that the extracoaching in school will definetely be helpful for raising the academic achievement of the tribal students Thus rates of wastage and dropout may be reduced It is again confirmed by Shah (1992) in her study 'Educational Problems of Tribal Students'.

8 MIDDAY MEALS, SCHOLARSHIP, PRE-PRIMARY EDUCATION

In Karnataka, CARE (1977) had undertaken the mid day meal scheme It was found that the mean percentage of attendance increased Absenteism not only decreased but the mid day meal programme produced stability in attendance. Midday meal programme had become a boon to the poor children (Acharya 1984). A study conducted by NIEPA (1979) revealed that midday meals, text-books, free uniforms, scholarships were the major incentives provided to the students but as they were not provided timely, therefore, their impact on retention of the students in schools decreased.

Regarding scholarships, Turner (1927) Feingold (1928) and Burton (1945) found a direct relationship between scholarship and attendance in class. Chandrashekharan (1978) reported that 88% of the headmasters confirmed that the attendance scholarship scheme for girls, though limited to a few, had let to the improvement of attendance among girls in the schools.

Further, Pre-primary education should be encouraged as one

of the remedies to deal with the problems of wastage and stagnation (Dass & Garg, 1985).

Thus, the incentives like middy meals, scholarship facility etc may reduce the dropout rate Pre-primary education can enhance the retention rate of children

CONCLUSION

Thus, the foregoing discussion reveals that a number of variables related to school are assessed as significant pro-predictors of dropout The dropout problem can be minimized if the facilitating schemes like midday meals, scholarships, books, school uniforms etc. are introduced effectively and timely. Improvement in school hours and activities are also demand of the time. The real educational challenge is for the school to make itself relevant and meaningful and, in the process, to educate truely.

REFERENCES

Acharya, S. C : *Pre-primary and Primary Education in Tripura and Cachar*, Development and Problems, Ph D. Edu., Gau U, 1984.

Adiseshia, M. A. and Ramanathan, S. - *Educational Problem of Scheduled Castes and Scheduled Tribes in Tamil Nadu*, Madras Institute of Development Studies, 1974. (ICSSR Financed)

Alvi, N. R. and Khan, S : *Extent and Causes of Dropouts in Girl's Primary Schools in D. G Khan Distt.*, Punjab Uni, 1965.

Asthana, M. *A Study of Socio-Psyehological Correlates of dropouts Senior Basic Level*, Ph.D., Edu., Rohilkhand Uni., 1993.

Barua, A P. . *Wastage in Sibsagar and Golaghat Sub-divisions*—A Comparative Study, SIE, Assam 1971

Bokil, S. R · *A Statistical Analysis of Failures in English (with texts) at S. S C Examination of March, 1961 for Urban, Semi Urban and Rural Schools*, Research Investigation Section, Mahorashtra State Board of Secondary Education, Poona, 1963.

Bose, P K & Mukharjee, S. P. : *Wastage and Stagnation in Collegiate Education*, Dept. of State. Cal. U. 1971

Bureau of Economics and Statistics : Evaluation Study un Wastage at Primary School Level in Andhra Pradesh, Hyderabad, 1970.

Buton, R. W. : 'The effect of college attendance upon personality as measured by Berneuter Personality Inventory-', Jr Edu., Res , 1945.

Care--India : "School Feading in Karnataka · Impact on Environment and Attendance", Karnataka, 1977

Chandrasekharan, K. N : *Nutritional Studies on Children of the School going Age*, Ph D. Home Science, M S. U , 1968.

Dass, J R. & Garg, V. P. : Impact of Pre-primary Education on Dropout, Stagnation and Academic Performance, Edu Deptt , Municipal Corporation, Delhi, 1981.

Das, R C. : An Investigation into the Problem of Wastage & Stagnation at the Primary level of Education in the Distt. of Sibsagar, D. Phil. Edu. Gau. U., 1970.

Das, R. C · Impact of School Conditions of Primary Education, SIE, Assam, 1974

DEPSE : Sample Studies of failures in Board of Secodary Edncation, NCERT, New Delhi, 1964.

De Rebello, D. M., Formal schooling and personal efficacy, Directorate of School education, Hyderabad, 1979 (ICSSR financed).

Devi, K. G. : Ptoblem of Dropout in Primary Schools of Manipur with special reference to Imphal Town (1963-1970), Ph.D , Edu , Gau. U., 1983.

Gangopadhyay, S R Sociological Study of the causes of Dropouts and Repeaters in Secondary Schools (A Comparative Study) Ph.D. Social Science, Bhagalpur, U., 1985.

GCPI : An Investigation into the Causas of High incidence of Failures at High School Examination of the U P Board, Allahabad, 1964

Goel, B. S. : Development of Education in British India, Ph D Edu , Del. U , 1968

Hussain, M. · Wastage and Stagnation in Primary Schools of Rural and Urban Areas of Bhilwara Distt., SIERT, Rajasthan, 1982

Joshi. G. K. : Expansion of Ungraded Unit Teaching System, Evaluation and Result, STE, Rajasthan, 1978.

Kamat, A. R. and Deshmukh, A. G. : Wastage in College education, Gokhale Institute of Politics and Economics, Poona, 1963

Kashinath, H. M. : A Critical Study of the Problems of Wastage and Stagnation in Primary Education in Karnataka State, Ph.D , Edu., Kar. U , 1980.

Lakhera, S. K. : Educational Problems of the Scheduled Tribe Pupils studying in Junior Secondary School of Distt. Chamoli, Gar. U , 1986

Manuel, N. V ; Feroze, M and Rao, S The Socio-economic conditions of high school pupils in Coimbatore district, Sri R. K. Mission Vidayalaya, Coimbatore, 1960.

Masqvi, M. I. : Wastage and Stagnation in Tribal Areas. Tribal Research and Training Institute, Gujrat Vidyapith, Ahmedabad, 1976

Mathur, J. S., Jain, S P. and Rahim, C. A. : A Rural Youth from Poverty groups, dropouts and Non-Students, NIRD, 1982.

NIEPA · A Study of Administration of Elementary Education in relation to the Programme of Universalization in West Bengal, New Delhi, 1979

Patel, H. C. & Diwan, M. L. · A Study of Dropouts from Full Time Diploma (engineering) Courses in Shri Bhagubhai Mafat Lal Polytechnic, Bombay, Bombay, SBM Polytechnic, Bombay, 1981.

Phadeke, J. K and Shukla. R. C A Study in Dropout among Scheduled tribe college students in Vyara, in Arts and Commerce College, Vyara, 1983.

Pillai, G V , Benjamin, J. and Nair, K R : A Study of Dropouts in Primary Education in Kerala, State Planning Board, Govt. of Kerala, Trivandrum, 1980

Pillani, J. K. : A Suggested Programme for Checking the Problems of Dropouts with special reference to Girls, New Frontiers in Education, Journal of Education, Vol. VII, No 4, Oct.-Dec., 1977.

Pratap, D. R , Raju, C. C. and Rao, M. V K. : Study of Ashram Schools in Tribal Areas of Andhra Pradesh, Tribal Cultural Research and Training Institute, Hyderabad. 1971.

Raj Goplan, C Educational Progress and Problems of Scheduled Caste and Scheduled Tribe Students in Karnataka (High Schools), Deptt. of Soc , Bomb. U. 1974, (ICSSR Financed)

Rath, R and Mishra, S. K. , The Study of Scheduled Caste and Scheduled Tribe College Students in Orissa, Deptt of Psychology, Utkal Uni., 1972

Turner, F. H. · A Study in Relation to Class Attendance of Scholastic Attainment, School and Society, 1927

Shah, B : Tribal Education—Prospective and Prospects, 1991

Shah, M. R · A Study of Incidence and Factors responsible for dropping out of children from Municipal and local authority schools in Greater Bombay and Thana Distts. from standard I to VII during last four years i.e 1973 to 1977, Gujrat Research Society, 1983

Shastri, C. . Human Resource Development and Educational Planning in Kumaun, Ph D Eco., Kum U., 1977.

State Institute of Education, Educational Wastage at Primary level in Haryana, Karnal , 1969.

Sri Avinashlingum : Problems of Educating girls betwen, 4-17 years of age, Coimbatore, 1970

Srivastava, A S & Gupta, S P . Survey of the Non-enrolled, Non-attending and Dropout Children of the Age group six to Fourteen in Ferozpur Distt., Dev Samaj College of Education for Women, Ferozepur, 1980.

Sujatha, D An Investigation into the Constraints on Education of the Nelbore District Yandis with a view to suggest some strategies of Non-Formal Education, Ph.D Edu , And. U , 1980

सारांश

शिक्षा राष्ट्रीय विकास की आधारशिला है। यह विकास की गति तीव्रकर वर्तमान एव भविष्य के लिए महत्त्वपूर्ण योगदान एव नवीन आयाम प्रदान करती है। शिक्षा व्यक्ति के अन्दर छिपी हुई अन्तर्निहित शक्तियो का विकास करती है। स्वतन्त्रता प्राप्ति के पश्चात्, भारत सरकार द्वारा शिक्षा प्रसार सम्बन्धी योजनाओं को प्रमुखता दी जाती

रही है। हमारे संविधान मे प्रत्येक बालक/बालिका को शिक्षा के अवसर उपलब्ध कराने का प्रावधान रखा जाता रहा है। परन्तु आज भी हम लक्ष्य को प्राप्त नही कर पा रहे है।

प्राय माता पिता अपने बालक/बालिका को बडे उत्साह के साथ प्राथमिक विद्यालय में प्रवेश दिला देते हैं। परन्तु खेद एव आश्चर्य का विषय है कि आज भी अनेक छात्र बिना पाठ्यक्रम को पूर्ण किये हुये बीच मे ही विद्यालय छोड देते है। अनेक शोधकर्त्ताओ ने विद्यार्थियो के विद्यालय से सम्बन्धित विद्यालय छोडने के कारणो को जानने का प्रयास किया है। अत इस लेख में शोधकर्त्ताओ के शोध निष्कर्षो का पुनरावलोकन करने का प्रयास किया गया है।

बीना शाह एवं राधा दुआ

*

STARTING POINT

The starting point of Educational reform must be the relinking of the school to life and restoring of the intimate relationship between them which has been broken down with the development of formal tradition of Education. We would like the school to become a centre of actual Social Life and social activities where the same kind of motives and methods are employed as operate in the life of any normal and decent human group.

—Report of the Secondary Education Commission

लक्ष्मीनारायण दुबे

अन्त:मुखी बहिर्मुखी व्यक्तित्व मापनी (मैनुअल)

"व्यक्तित्व व्यक्ति मे अन्तर्भूत उसके उन मनोशारीरिक गुणो का गतिशील सगठन है जो वातावरण मे उसके अपूर्व समायोजन को निर्धारित करता है।"

"व्यक्तित्व व्यक्ति के चरित्र, चित्त प्रकृति, ज्ञानशक्ति एवं शारीरिक गठन का प्राय स्थायी एव स्थिर सगठन है जो वातावरण मे उसके समायोजन मे सहायक होता है।"

आइजन्क

शारीरिक एव मानसिक गुणो की दृष्टि से युग ने व्यक्तित्व गुणो को दो वर्गो मे बाँटा है.—

अन्त:मुखी

अन्त.मुखी व्यक्ति आत्म-केन्द्रित होते है और ये व्यवहार कुशल नही होते। ये विचारशील और चिन्तनशील होते है परन्तु सासारिक गतिविधियो मे क्रियाशील नही होते है। ये प्राय. शर्मीले और भीड़-भाड़ से दूर रहने वाले है। ये प्राय' रूढिवादी होते है।

बहिर्मुखी

ये समाजप्रिय, आशावादी, अवसर-वादी और चचल होते है। ये क्रियाशील और वाह्य जीवन पसन्द करते हैं। ये दूसरो को शीघ्र प्रभावित कर लेते हैं। ये आधुनिक और नवीन वस्तुओ के प्रेमी होते हैं।

प्रो० लक्ष्मीनारायण दुबे, प्राध्यापक, सरस्वती शिक्षा महाविद्यालय, जबलपुर।

उभयमुखी

इनमें कुछ गुण अन्त मुखी और कुछ गुण बहिर्मुखी के होते है ।

न्यादर्श

इस परीक्षण में १० विद्यालय और ६ महाविद्यालयो से ७५० लडके और ४५० लडकियाँ यादृच्छिक विधि से लिये गये । इनकी आयु सीमा १३ वर्ष से २३ वर्ष तक की थी ।

निर्देश

"इस मापनी मे कुछ कथन दिये गये है । प्रत्येक कथन के सामने तीन-तीन विकल्प है । आप जिस कथन से पूर्णत. सहमत हां उसके सामने "सदैव" वाले खाने में सही (✓) का निशान लगा दीजिए, यदि आप सामान्यत सहमत हो तो "कभी-कभी" वाले खाने मे सही का निशान लगाइये और यदि आप असहमत है तो "कभी नही" वाले खाने मे सही का निशान लगाइये ।

इस मापनी को पूरा करने के लिए कोई समय सीमा नही है परन्तु आप शीघ्र से पूरा करने का प्रयास कीजिए ।

मूल्यांकन

इस परीक्षण मे ६० कथन दिये गये है । प्रत्येक कथन के सामने तीन विकल्प हैं । "सदैव" पर २ अक, "कभी-कभी" पर एक अक और "कभी नही" पर शून्य अक दीजिए । सब अंकों को जोड लीजिए । तालिका क्रमांक—५ के अनुसार अन्त मुखी बहिर्मुखी के स्तर को निर्धारित कीजिए ।

तालिका क्रमाक १

विश्वसनीयता (संख्या २००)

विधि	विश्वनीयता	स्तर
पुन. परीक्षण (अन्तराल ३ माह)	८१	० ०१
अर्द्ध विच्छेद	७७	० ०१

तालिका क्रमांक २

वैधता (संख्या २००)

परीक्षण	वैधता गुणाक	स्तर
अन्त मुखी बहिर्मुखी अजोज एव रेखा अग्निहोत्री	० ८२	० ०१

तालिका क्रमांक ३

साख्यकीय मान—

समूह	मध्यमान	मध्याक	विचलन
लडके	६२ ६६	६३ ०१	१४ २१
लडकियाँ	६० ३४	६१ ८५	१२ ८८

तालिका क्रमांक ४

मानक टी अंक

प्राप्ताक	लडके	दो अक	लडकियाँ	प्राप्ताक	लडके	दो अक	लडकियाँ
३६	३१		३१	८०	६२		६५
४०	३४		३४	८४	६५		६८
४४	३६		३७	८८	६७		७१
४८	३९		४०	९२	७०		७४
५२	४२		४३	९६	७३		७७
५६	४५		४६	१००	७६		८०
६०	४७		४९	१०४	७९		८३
६४	५०		५२	१०८	८१		८७
६८	५३		५५	११२	८४		९०
७२	५६		५९	११६	८७		९३
७६	५९		६२	१२०	९०		९६

तालिका क्रमांक ५

अन्त:मुखी बहिर्मुखी व्यक्तित्व का वर्गीकरण

श्रेणी	प्राप्तांक	
	लडके	लड़कियाँ
अधिक बहिर्मुखी	८० और अधिक	८० और अधिक
बहिर्मुखी	६९ — ८१	६७ — ७९
उभयमुखी	५६ — ६८	५४ — ६६
अन्त मुखी	४३ — ५५	४१ — ५३
अधिक अन्त:मुखी	४२ और कम	४० और कम

सन्दर्भ ग्रन्थ

१ आलपोर्ट, जी डब्ल्यू : व्यक्तित्व मनोवैज्ञानिक विश्लेषण—१९३७

२ आइजन्क, एच० व्यक्तित्व का मनोवैज्ञानिक अध्ययन—१९५२

३ युग, सी० जी० सायकालाजीकल टाइप—१९२३

अन्त:मुखी-बहिर्मुखी व्यक्तित्व मापनी

Introversion-Extroversion Personality Scale

नाम...आयु....................

विद्यालय/महाविद्यालय..कक्षा....................

दिनांक...............................हस्ताक्षर...

निर्देश

इस मापनी में कुछ कथन दिये गये है प्रत्येक कथन के सामने तीन विकल्प है। आप प्रत्येक कथन को ध्यानपूर्वक पढ़िए। तीन विकल्पों में से जो विकल्प आपको अपने सम्बन्ध में सबसे अधिक उपयुक्त लगे उसके सामने वाले बाक्स में सही (√) का निशान लगा दीजिए।

इस मापनी को पूरा करने के लिये कोई समय सीमा नही है परन्तु आप इसे शीघ्र से शीघ्र समाप्त करने का प्रयास करिए।

क्रमांक	कथन	सदैव	कभी-कभी	कभी नही
१	प्रत्येक कार्य का निर्णय शीघ्र ले लेता हूँ।	( )	( )	( )
२.	किसी नये स्थान मे परिचित व्यक्ति के साथ ही जाता हूँ।	( )	( )	( )
३.	हास-परिहास मे खुलकर भाग लेता हूँ।	( )	( )	( )
४.	अनुभव के अभाव में कोई नया कार्य नही करता।	( )	( )	( )
५.	तेज चलने की आदत है।	( )	( )	( )
६	सामूहिक चर्चा मे ही रहता हूँ।	( )	( )	( )

७.	अपने मन के विचार नि सकोच कह देता हूँ।	( )	( )	( )
८.	प्रत्येक कार्य अपने परिचित ढग से करना पसन्द है।	( )	( )	( )
९	सफलता-असफलता की चिन्ता किये बिना ही अपना कार्य प्रारम्भ कर देता हूँ।	( )	( )	( )
१०	प्रश्न का उत्तर जानते हुए भी शीघ्रता से उत्तर नही दे पाता।	( )	( )	( )
११	अपनी समस्याएँ स्वय हल करने में विश्वास रखता हूँ।	( )	( )	( )
१२	कोई नया कार्य प्रारम्भ करने से पहले कई लोगो से पूछता हूँ।	( )	( )	( )
१३	वाद-विवाद, भाषण आदि प्रतियोगिताओं मे भाग लेने मे सदैव तत्पर रहता हूँ।	( )	( )	( )
१४	अपनी बनाई योजना पर भी कार्य करने मे कठिनाई होती है।	( )	( )	( )
१५.	मै अपनी योग्यता से अधिक ऊँचे लक्ष्य बनाता हूँ।	( )	( )	( )
१६	अनजान स्थान मे जाने से डर लगता है।	( )	( )	( )
१७.	मेरा चेहरा दूसरो से अधिक आकर्षक है।	( )	( )	( )
१८	अपनी राय की अपेक्षा दूसरो की राय पर ही चलता हूँ।	( )	( )	( )
१९	तेज रफ्तार की गाडी मे बैठने मे आनन्द आता है।	( )	( )	( )
२०	गायक या वक्ता की अपेक्षा श्रोता बनना पसन्द है।	( )	( )	( )
२१	अकेले लम्बी यात्राये कर सकता हूँ।	( )	( )	( )
२२.	परिश्रम की अपेक्षा भाग्य से ही काम बनते है।	( )	( )	( )

२३	दूसरो का सहयोग न मिलने पर भी अपना कार्य प्रारम्भ कर देता हूँ ।	( )	( )	( )
२४	किसी खेल मे बार-बार हार जाने पर उस खेल को छोड़ देता हूँ ।	( )	( )	( )
२५	पहाडी एव दुर्गम स्थानो के टेढे-मेढे रास्तों पर चलने मे आनन्द आता है ।	( )	( )	( )
२६	उपयुक्त समय पर अपनी बात करने मे प्राय चूक ही जाता हूँ ।	( )	( )	( )
२७	आकर्षक लडके या लडकी से पहचान करने मे स्वय पहल करता हूँ ।	( )	( )	( )
२८	अवसर मिलने पर भी अपना कौशल दिखाने मे कसर रह जाती है ।	( )	( )	( )
२९	विरोधी के शक्तिशाली होने पर भी उसका डट कर मुकाबला करता हूँ ।	( )	( )	( )
३०.	कुछ काम ऐसे है, जिन्हे करना मेरे लिये सम्भव नही है ।	( )	( )	( )
३१	सामाजिक एव सांस्कृतिक समारोहो की व्यवस्था का भार लेने में स्वय पहल करता हूँ ।	( )	( )	( )
३२	अपना प्रत्येक कार्य समय पर नही कर पाता ।	( )	( )	( )
३३.	नवीन एव आधुनिक वस्त्र पहनना अच्छा लगता है ।	( )	( )	( )
३४	दूसरो की सफलता का कारण उनका मुझसे अधिक गुणी होना है ।	( )	( )	( )
३५	मुझे जो पाना है उसे पाकर ही रहता हूँ ।	( )	( )	( )
३६	ऐसा लगता है कि जो कहना चाहता हूँ वह नही कह पाता ।	( )	( )	( )
३७	रोमाचक खेलो मे भाग लेना अच्छा लगता है ।	( )	( )	( )
३८	जब लोग मुझे ध्यानपूर्वक देखते है तो मेरी चाल तेज हो जाती है ।	( )	( )	( )

३९.	दूसरो की अपेक्षा अपना कार्य शीघ्र कर लेता हूँ।	( )	( )	( )
४०	असफलता का कारण भाग्य का साथ न देना है।	( )	( )	( )
४१	समुचित सुविधाओ के बिना भी निश्चित किया गया अपना कार्य प्रारम्भ कर देता हूँ।	( )	( )	( )
४२	किसी अधिकारी को अपनी बात स्वय न कहकर दूसरो के द्वारा कहलवाता हूँ।	( )	( )	( )
४३.	अपना प्रत्येक काम किसी भी प्रकार पूरा करके ही रहता हूँ।	( )	( )	( )
४४.	पूर्ण तैयारी होने पर भी परीक्षा या साक्षात्कार से भय लगता है।	( )	( )	( )
४५	दूसरो के पीछे चलने की अपेक्षा उनका नेतृत्व करना पसन्द है।	( )	( )	( )
४६	दूसरो के सामने काम करने मे काम करने की गति धीमी हो जाती है।	( )	( )	( )
४७	हर कार्य अपनी सामर्थ्य से अधिक करना चाहता हूँ।	( )	( )	( )
४८	अपने विचारों को अपने तक ही सीमित रखता हूँ।	( )	( )	( )
४९	सरल कार्य की अपेक्षा चुनौतीपूर्ण कार्य लेना पसन्द है।	( )	( )	( )
५०.	सुन्दर पुरुष या महिला से बात करने मे सकोच लगता है।	( )	( )	( )
५१	अपरिचित व्यक्तियों के साथ काम करने मे भय नही लगता।	( )	( )	( )
५२	अच्छे मुहूर्त की चिन्ता किये बिना अपना कार्य प्रारम्भ कर देता हूँ।	( )	( )	( )
५३	नये लोगो के सामने बहुत कम बोलने की आदत है।	( )	( )	( )

५४	एकान्त मे पुस्तक पढ़ने की अपेक्षा नये लोगो मे मिलना पसन्द है।	( )	( )	( )
५५	एकान्त मे कार्य करना अच्छा लगता है।	( )	( )	( )
५६	दूसरो के द्वारा आलोचना करने पर भी मै विचलित नही होता।	( )	( )	( )
५७.	अपनी हमउम्र के विपरीत लिग वाले व्यक्तियो के द्वारा पीछा किये जाने पर भयभीत हो जाता/जाती हूँ।	( )	( )	( )
५८	यह ससार लुभावना लगता है।	( )	( )	( )
५९	कार्य बिगडने पर लगता है कि किसी ने बिगाड दिया है।	( )	( )	( )
६०	मनुष्यो के दुखो का कारण उनका भाग्य नही आत्मविश्वास की कमी है।	( )	( )	( )

फार्म 4

(नियम 8 देखिये)

1—प्रकाशन स्थान	लखनऊ
2—प्रकाशन अवधि	अर्धवार्षिक
3—मुद्रक का नाम	श्री विश्व मोहन मेहता
(क्या भारत का नागरिक है ?)	हाँ
पता	पनार मुद्रक, नजीराबाद, लखनऊ
4—प्रकाशक का नाम	डा० गुज्जर मल्ल वर्मा
(क्या भारत का नागरिक है ?)	हाँ
पता	सचिव भारतीय शिक्षा शोध संस्थान सरस्वतीकुँज, निराला नगर, लखनऊ–226020
5—सम्पादक का नाम	डॉ० सीताराम जायसवाल
(क्या भारत का नागरिक है ?	हाँ
पता	अध्यक्ष एव निदेशक भारतीय शिक्षा शोध संस्थान सरस्वती कुज, निराला नगर, लखनऊ–226020
6—उन व्यक्तियो के नाम व पते जो पत्रिका के स्वामी हो तथा जो समस्त पूंजी के एक प्रतिशत से अधिक के साझेदार या हिस्सेदार हो ।	भारतीय शिक्षा शोध संस्थान सरस्वती कुँज, निराला नगर, लखनऊ–226020

मै गुज्जर मल्ल वर्मा एतद् द्वारा घोषित करता हूं कि मेरी अधिकतम जानकारी एव विश्वास के अनुसार ऊपर दिये गये विवरण सत्य है ।

दिनाक 25.8.95

ह० गुज्जर मल्ल वर्मा
प्रकाशक के हस्ताक्षर

सेवा में,

प्रबन्ध सम्पादक

भारतीय शिक्षा शोध पत्रिका

भारतीय शिक्षा शोध संस्थान

सरस्वती कुन्ज, निरालानगर, लखनऊ–२२६ ०२०

दिनांक........................

मान्यवर,

मै/हमारी संस्था आपकी पत्रिका का वार्षिक/आजीवन ग्राहक बनने की इच्छुक हूँ/है। इसका शुल्क 60/- / 500/- (साठ/पाँच सौ रुपये) 'भारतीय शिक्षा शोध पत्रिका' के नाम से नकद/धनादेश/ड्राफ्ट क्र०.................... बैंक............................ ....लखनऊ के द्वारा भेज रहे हैं। प्राप्ति की सूचना दें व पावती भिजवाने की कृपा करें।

हमारा पता–

श्री ....

भवदीय

....

....

....

संस्था की मुहर

To,

The Managing Editor

Bharatiya Shiksha Shodh Patrika,

BHARATIYA SHIKSHA SHODH SANSTHAN

SARASWATI KUNJ, NIRALANAGAR

LUCKNOW-226 020

Date . . ..

Dear Sir,

Please enrol me/my institution as annual/life subscriber for the Shodh Patrika for the year 199 -9

I am remitting herewith Rs. 60/- / Rs. 500/- as subscription for the same by Cash / M. O / Bank Draft No ... ... in the name of 'BHARATIYA SHIKSHA SHODH PATRIKA' at .. .. Bank .... Lucknow.

Kindly acknowledge with due receipt.

Address :

.... Yours faithfully

....

....

....

Stamp

Bharatiya Shiksha Shodh Patrika

(A Bi-Annual Research Journal)

Editor	—	**Prof. S. R. Jayaswal**	(Lucknow)
Co-Editors	—	**Dr. G. M. Verma**	(Delhi)
		Dr. S. S. Srivastava	(Varanasi)
		Dr. V. K. Mittal	(Meerut)

It is devoted to the publication of theoretical and empirical research in Education and Psychology with reference to Indian Culture The Journal publishes papers in Hindi and English. The summary of Hindi papers is published in English and of English papers in Hindi.

All manuscripts for publication should be type-written on one side of the page only, with double spacing and wide margins. The literature should be cited at the end of the paper, arranged alphabetically, authorwise, employing international symbols and underlining the titles of the periodicals and books. The desirable limit of the manuscript is 3000 words. The papers are presumed to be offered to no other journal for publication. The manuscript should be sent in duplicate, together with a short abstract of about 200 to 300 words in Hindi if the paper is in English and vice versa. Book Reviews are also published.

Subscription

Per Copy	Rs 30 00 only	: Foreign $ 10 00
Annual	Rs. 50 00	. Foreign $ 18.00
Lifelong	Rs 500 00 only	: Foreign $ 150.00
	Rs. 400 00 only	· (For schools affiliated with Vidya-Bharati)

Subscription Amount must be made payble to "Bharatiya Shiksha Shodh Patrika" at Lucknow.

Distribution

Bharatiya Shiksha Shodh Sansthan, Saraswati Kunj, Niralanagar, Lucknow

Back Volumes Rs 30 00 per copy

Contact (For Articles, Distribution & Subscription)

Editor, Bharatiya Shiksha Shodh Patrika
Saraswati Kunj, Niralanagar, Lucknow-226 020

Regd. No 6308/80

भारतीय शिक्षा शोध संस्थान के प्रकाशन

क्र० स०	नाम सामग्री	मूल्य प्रति प्रपत्र
1.	भारतीय मनोविज्ञान	95 00
2.	भारतीय मनोविज्ञान और शिक्षा	90.00
3.	सर्वांगीण बाल विकास	70 00
4.	भारतीय शिक्षा शोध पत्रिका के दस वर्ष	10.00
5.	सामान्य बुद्धि परीक्षण–हस्तपुस्तिका	15.00
6	,, ,, ,, प्रश्न पत्र	4 00
7.	,, ,, ,, उत्तर पत्र	2 00
8.	,, ,, ,, अभ्यास पत्र	2.00
9.	,, ,, ,, कुंजिका	5.00
10.	अभिभावक प्रश्नावली	3.00
11.	मूल्य मापनी	3.00
12.	सद्गुण विकास मापनी प्रश्नावली	5 00
13.	उद्देश्य निर्धारण प्रश्नावली	3 00
14.	सफल प्रधानाचार्य लक्षण सूची	2.00
15.	सामाजिक, आर्थिक, अध्ययन प्रश्नावली	4.00
16.	नैतिक मूल्यो का परीक्षण	2 00
17.	बाल प्रश्नावली	3 00
18.	समस्या प्रश्नावली	3.00
19	प्रेरणा प्रश्नावली (प्रधानाचार्यो द्वारा भरी जाने वाली)	4.00
20.	शिविरावसर पर आचार्यो द्वारा भरी जाने वाली प्रश्नावली	3.00
21.	शिक्षणशील व्यक्तित्व हस्तपुस्तिका	15 00
22.	Characteristics of a Successful Principal	2.00
23	Educational Problems Questionnaire	3.00

नियम

1. 100 रु० या इससे अधिक मूल्य की सामग्री क्रय करने पर ग्राहक को 10 प्रतिशत वर्तन दिया जाएगा।
2. डाक खर्च ग्राहक को देना होगा।
3. आर्डर के साथ अनुमानित मूल्य अग्रिम भेजना चाहिए।
4. वी० पी० भेजने का नियम नही है।

Problems

1 Prove (237)

2 Solve $\nabla^2 V = 0$ for rectangular coordinates by the method of Sec 67, assuming $V = X(x)Y(y)Z(z)$.

3 Investigate the solution of $\nabla^2 V = 0$ in cylindrical coordinates

68. Applications

Example 84 A dielectric sphere of radius a is placed in a uniform field $\mathbf{E}_0 = E_0\mathbf{k}$. We calculate the field inside the sphere The potential due to the uniform field is $\varphi = -E_0 z = -E_0 r \cos\theta$ There will be an additional potential due to the presence of the dielectric sphere Assume it to be of the form $ArP_1 \equiv Ar\cos\theta$ inside the sphere and $Br^{-2}P_1 \equiv Br^{-2}\cos\theta$ outside the sphere We cannot have a term of the type $Cr^{-2}\cos\theta$ inside the sphere, for at the origin we would have an infinite field caused by the presence of the dielectric Similarly, if a term of the type $Dr\cos\theta$ occurred outside the sphere, we would have an infinite field at infinity due to the presence of the sphere If we let V_{I} be the potential inside and V_{II} the potential outside the sphere, we have

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{I}} &= -E_0 r\cos\theta + Ar\cos\theta \\ V_{\mathrm{II}} &= -E_0 r\cos\theta + \frac{B}{r^2}\cos\theta \end{aligned} \tag{243}$$

Notice that V_{I} and V_{II} are special cases of (241) We have two unknown constants, A, B, and two boundary conditions,

$$\begin{gathered} V_{\mathrm{I}} = V_{\mathrm{II}} \text{ at } r = a \\ D_{N_1} = D_{N_2} \qquad \text{or} \qquad \kappa\frac{\partial V_{\mathrm{I}}}{\partial r} = \frac{\partial V_{\mathrm{II}}}{\partial r} \text{ at } r = a \end{gathered} \tag{244}$$

(see Sec. 62). From (243) and (244) we obtain

$$A = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 2}E_0, \qquad B = a^3\frac{\kappa - 1}{\kappa + 2}E_0$$

so that

$$V_{\mathrm{I}} = -\frac{3}{\kappa + 2}E_0 r\cos\theta = -\frac{3}{\kappa + 2}E_0 z \tag{245}$$

We see that the field inside the dielectric sphere is

$$\mathbf{E} = -\nabla V_{\mathrm{I}} = \frac{3}{\kappa + 2}\mathbf{E}_0$$

and $\mathbf{E}$ is uniform of intensity less than $\mathbf{E}_0$ since $\kappa > 1$. Outside the sphere

$$V_{\mathrm{II}} = -E_0 r \cos\theta + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 2}\frac{a^3}{r^2} E_0 \cos\theta \tag{246}$$

The radial field outside the sphere is given by

$$E_r = -\frac{\partial V_{\mathrm{II}}}{\partial r} = E_0 \cos\theta + 2\frac{\kappa - 1}{\kappa + 2}\frac{a^3 E_0}{r^3}\cos\theta$$

For a given r the maximum E_r is found at $\theta = 0$.

Example 85 A conducting sphere of radius a and charge Q is surrounded by a spherical dielectric layer up to $r = b$ (Fig 65) Let us calculate the potential distribution From spherical symmetry $V = V(r)$, so that we try

$$V_{\mathrm{I}} = \frac{A}{r}$$

$$V_{\mathrm{II}} = \frac{B}{r} + C$$

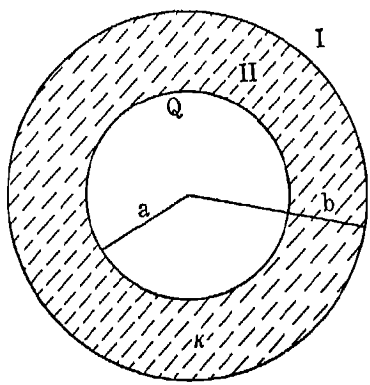

FIG 65

The boundary conditions are

(i) $$V_{\mathrm{I}} = V_{\mathrm{II}} \text{ at } r = b$$

(ii) $$\frac{\partial V_{\mathrm{I}}}{\partial r} = \kappa\frac{\partial V_{\mathrm{II}}}{\partial r} \text{ at } r = b$$

(iii) $$Q = \frac{1}{4\pi}\iint_S \mathbf{D}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = -\frac{\kappa}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\partial V_{\mathrm{II}}}{\partial r}\right)_{r=a} a^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

From (i) $A/b = (B/b) + C$, from (ii) $-A/b^2 = -\kappa B/b^2$; from (iii) $Q = (\kappa/4\pi)(B/a^2)\iint dS = \kappa B$ Hence

$$V_{\mathrm{I}} = \frac{Q}{r}, \qquad V_{\mathrm{II}} = \frac{Q}{\kappa r} + \frac{Q}{b}\frac{\kappa - 1}{\kappa} \tag{247}$$

Example 86. A conducting sphere of radius a and charge Q is placed in a uniform field We calculate the potential and the distribution of charge on the sphere We assume a solution

$$V = -E_0 r \cos\theta + \frac{B}{r}$$

The boundary condition is

$$Q = \frac{1}{4\pi}\iint_S -\left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=a} dS$$

so that

$$Q = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(E_0\cos\theta + \frac{B}{a^2}\right)a^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi = B$$

and

$$V = -E_0 r\cos\theta + \frac{Q}{r}$$

For the charge distribution

$$\sigma = \frac{(E_r)_{r=a}}{4\pi} = \frac{-\left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=a}}{4\pi} = \frac{1}{4\pi}\left(E_0\cos\theta + \frac{Q}{a^2}\right)$$

Example 87 Consider a charge q placed at $A(b, 0, 0)$ Let us compute the potential at any point $P(r, \theta, \varphi)$ (see Fig 66) The potential at P is

$$V = \frac{q}{s} = q(r^2 + b^2 - 2rb\cos\theta)^{-\frac{1}{2}}$$

There are two cases to consider.

(*a*) $r < b$ Let $\mu = \cos\theta$, $x = r/b$, so that

$$V = \frac{q}{b}(1 - 2\mu x + x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Now $(1 - 2\mu x + x^2)^{-\frac{1}{2}}$ can be expanded in a Maclaurin series in powers of x, yielding

$$V = \frac{q}{b} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) x^n = \frac{q}{b} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) \left(\frac{r}{b}\right)^n \tag{248}$$

The proof is omitted here that the $P_n(\mu)$ are actually the Legendre polynomials However, we might expect this, since V satisfies Laplace's equation and $P_n(\mu)r^n$ is a solution of $\nabla^2 V = 0$.

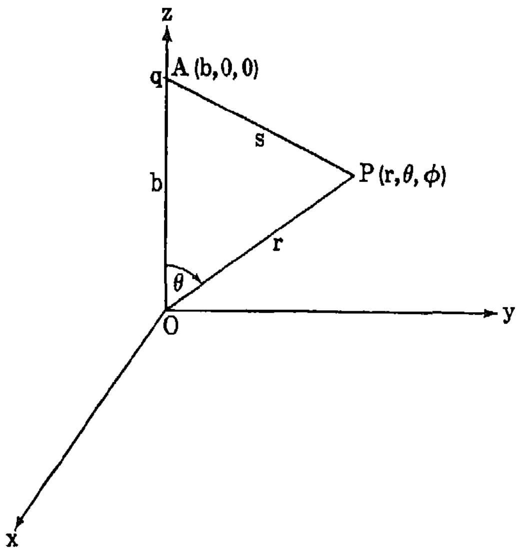

FIG 66

(b) $r > b$ In this case

$$V = \frac{q}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) \left(\frac{b}{r}\right)^n \tag{249}$$

Notice that each term is of the form $P_n(\mu)r^{-n-1}$, which satisfies Laplace's equation

Example 88 A point charge $+q$ is placed at a distance b from the center of two concentric, earthed, conducting spheres of radii a and c, $a < b < c$ We find the potential at a point P for $a < r < b$

For $r > b$, $V = (q/r) \sum\limits_{0}^{\infty} (b/r)^n P_n(\cos\theta)$ due to the charge q,

and for $r < b$, $V = (q/b) \sum\limits_{0}^{\infty} (r/b)^n P_n(\cos\theta)$ Moreover, we have

an induced potential of the form

$$V = q \sum_0^\infty (A_n r^n + B_n r^{-n-1}) P_n(\cos\theta) \tag{250}$$

which is due to the spheres, the A_n and B_n undetermined as yet Hence

$$\left.\begin{aligned}
&\text{For } r > b \\
&\qquad V_1 = q \sum_0^\infty [A_n r^n + (B_n + b^n) r^{-n-1}] P_n(\cos\theta) \\
&\text{For } r < b. \\
&\qquad V_2 = q \sum_0^\infty [(A_n + b^{-n-1}) r^n + B_n r^{-n-1}] P_n(\cos\theta)
\end{aligned}\right\} \tag{251}$$

The boundary conditions are

$$\begin{aligned}
&(i) && V_1 = 0 \text{ at } r = c \\
&(ii) && V_2 = 0 \text{ at } r = a
\end{aligned} \tag{252}$$

These yield the equations

$$\begin{aligned}
&(i) && A_n c^n + (B_n + b^n) c^{-n-1} = 0 \\
&(ii) && (A_n + b^{-n-1}) a^n + B_n a^{-n-1} = 0
\end{aligned}$$

so that

$$B_n = \frac{a^{2n+1}}{b^{n+1}} \frac{(c^{2n+1} - b^{2n+1})}{(a^{2n+1} - c^{2n+1})},$$

$$A_n + b^{-(n+1)} = -\frac{b^{-n-1}(c^{2n+1} - b^{2n+1})}{a^{2n+1} - c^{2n+1}}$$

Hence

$$V_2(P) = q \sum_{n=0}^\infty \frac{b^{2n+1} - c^{2n+1}}{b^{n+1}(a^{2n+1} - c^{2n+1})} \left(r^n - \frac{a^{2n+1}}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos\theta) \tag{253}$$

Problems

1 Show that the force acting on the sphere of Example 86 is $\mathbf{F} = \frac{1}{8} Q E_0 \mathbf{k}$.

2 A charge q is placed at a distance c from the center of a spherical hollow of radius a in an infinite dielectric of constant κ Show that the force acting on the charge is

$$\frac{(\kappa-1)q^2}{c^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n+1)}{n+\kappa(n+1)}\left(\frac{c}{a}\right)^{2n+1}$$

3 A point charge q is placed a distance c from the center of an earthed conducting sphere of radius a, on which a dielectric layer of outer radius b and constant κ exists Show that the potential of this layer is

$$V=\frac{q}{c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)b^{2n+1}(r^n-a^{2n+1}r^{-n-1})}{c^n\{[(\kappa+1)n+1]b^{2n+1}+(n+1)(\kappa-1)a^{2n+1}\}}P_n(\cos\theta)$$

4 Show that the potential inside a dielectric shell of internal and external radii a and b, placed in a uniform field of strength E, is

$$V=\frac{9\kappa E}{9\kappa-2(1-\kappa^2)[(b/a)^3-1]}\,r\cos\theta$$

5 The walls of an earthed rectangular conducting tube of infinite length are given by $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$ A point charge is placed at $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ inside the tube Show that the potential is given by

$$V=8q\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(m^2a^2+n^2b^2)^{-\frac{1}{2}}e^{-a^{-1}b^{-1}(m^2a^2+n^2b^2)^{\frac{1}{2}}\pi(z-z_0)}\sin\frac{n\pi x_0}{a}$$
$$\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y_0}{b}\sin\frac{m\pi y}{b}$$

69. Integration of Poisson's Equation. Instead of assuming that φ is harmonic, let us consider that φ satisfies $\nabla^2\varphi=-4\pi\rho$ By applying Green's formula as in Sec 66, we immediately obtain

$$\varphi(P)=\iiint_R\frac{\rho}{r}\,d\tau+\iint_S\left(\frac{1}{r}\nabla\varphi-\varphi\nabla\frac{1}{r}\right)\cdot d\mathbf{\sigma}\qquad(254)$$

If we make the further assumption that φ is of the order of $1/r$ for large r and that $|\nabla\varphi|\sim 1/r^2$, we see that by pushing S out to infinity the surface integral will tend to zero Our assumption is valid, for if we assume the charge distribution to be bounded by some sphere, then at large distances the potential will be of the order of $1/r$, since we may consider all the charges as essentially

concentrated at a point. Thus

$$\varphi(P) = \iiint\limits_{\infty} \frac{\rho}{r}\, d\tau \tag{255}$$

70. Decomposition of a Vector into the Sum of Solenoidal and Irrotational Vectors. In Example 70, we saw that if $|\mathbf{f}|$ tends to zero like $1/r^2$ as $r \to \infty$, then $\mathbf{f}$ as uniquely determined by its curl and divergence

We now proceed to write $\mathbf{f}$ as the sum of irrotational and solenoidal vectors. Let

$$\mathbf{W}(P) = \iiint\limits_{\infty} \frac{\mathbf{f}\, d\tau}{r} \tag{256}$$

where r is the distance from P to the element of integration $d\tau$ If we write $\mathbf{f} = f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k}$, $\mathbf{W} = W_1\mathbf{i} + W_2\mathbf{j} + W_3\mathbf{k}$, then

$$\begin{aligned} W_1 &= \iiint\limits_{\infty} \frac{f_1}{r}\, d\tau \\ W_2 &= \iiint\limits_{\infty} \frac{f_2}{r}\, d\tau \\ W_3 &= \iiint\limits_{\infty} \frac{f_3}{r}\, d\tau \end{aligned} \tag{257}$$

We assume that the components of $\mathbf{f}$ are such that the integrals of (257) converge and that $|\mathbf{W}| \sim 1/r$, $|\nabla W_n| \sim 1/r^2$, $n = 1, 2, 3$ From Sec. 69, $\nabla^2 W_n = -4\pi f_n$, so that

$$\nabla^2\mathbf{W} = -4\pi\mathbf{f} \tag{258}$$

From (256)

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{W} &= -\iiint\limits_{\infty} \mathbf{f} \cdot \nabla \frac{1}{r}\, d\tau \\ \nabla \times \mathbf{W} &= \iiint\limits_{\infty} \mathbf{f} \times \nabla \frac{1}{r}\, d\tau \end{aligned} \tag{259}$$

Now

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{W}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{W}) - \nabla^2\mathbf{W}$$

so that

$$\mathbf{f} = \frac{1}{4\pi} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{W}) - \frac{1}{4\pi} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{W})$$

and hence

$$\mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla\varphi \tag{260}$$

where

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \mathbf{W}, \qquad \varphi = -\frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \mathbf{W}$$

Problems

1 Show that (256) is a special case of (254)

2. Find an expression for $\varphi(P)$ if $\nabla^2\varphi = -4\pi\rho$ inside S and if P is on the surface S.

3. $\mathbf{f} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + (xy - xz)\mathbf{k}$. Express $\mathbf{f}$ as the sum of an irrotational and a solenoidal vector

71. Dipoles. Let us consider two neighboring charges $-q$ and $+q$ situated at $P(x, y, z)$ and $Q(x + dx, y, z)$ The potential at the origin $O(0, 0, 0)$ due to $-q$ is $-q/r$, and that due to $+q$ is $q/(r + dr)$, where $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ and

$$r + dr = [(x + dx)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}$$

The potential at $O(0, 0, 0)$ due to both charges is

$$\varphi = \frac{q}{r + dr} - \frac{q}{r} \approx \frac{q}{r^2}\, dr$$

Now $dr = x\, dx/r$, so that $\varphi \approx qx\, dx/r^3$ If we now let $q \to \infty$ and $dx \to 0$ in such a way that $q\, dx$ remains finite, we have formed what is known as a dipole Let $\mathbf{r}$ be the position vector from the origin to the dipole, and let $\mathbf{M} = q\, d\mathbf{r}$, where $d\mathbf{r}$ is the vector from the negative charge to the positive charge, $|d\mathbf{r}| = dx$ We have $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{r})/r^3 = (q\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r})/r^3 = (qx\, dx)/r^3$, so that

$$\boxed{\varphi = \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}}{r^3}} \tag{261}$$

$\mathbf{M}$ is called the strength or moment of the dipole. For more than one dipole, the potential at a point P is given by

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\mathbf{M}_i \cdot \mathbf{r}_i)}{r_i^3}$$

where $\mathbf{r}_i$ is the vector from P to the dipole having strength $\mathbf{M}_i$.

Example 89 The field strength due to a dipole is $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ so that

$$\mathbf{E} = -\nabla\left(\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{M}}{r^3}\right) = \frac{3(\mathbf{r}\cdot\mathbf{M})}{r^5}\mathbf{r} - \frac{\mathbf{M}}{r^3} \tag{262}$$

Example 90 *Potential energy of a dipole in a field of potential* φ Let φ_1 be the potential at the charge q and φ_2 the potential at the charge $-q$ The energy of the dipole is

$$W = \varphi_1 q + \varphi_2(-q) = q(\varphi_1 - \varphi_2) = q\frac{\partial\varphi}{\partial s}ds = M\frac{\partial\varphi}{\partial s}$$

where ds is the distance between the charges Now

$$d\varphi = d\mathbf{s} \quad \nabla\varphi$$

so that $W = M\dfrac{\partial\mathbf{s}}{\partial s}\cdot\nabla\varphi = \mathbf{M}\cdot\nabla\varphi$

72. Electric Polarization. Let us consider a volume filled with dipoles The potential due to any single dipole is given by (261) If we let $\mathbf{P}$ be the dipole moment per unit volume, that is, $\mathbf{P} = \lim_{\Delta\tau\to 0} (\Delta\mathbf{M}/\Delta\tau)$, then the total potential due to the dipoles is

$$\varphi = \iiint_R \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{P}}{r^3}\,d\tau \tag{263}$$

Now $\nabla\cdot(\mathbf{P}/r) = (1/r)\nabla\cdot\mathbf{P} - [(\mathbf{P}\cdot\mathbf{r})/r^3]$ The reason that we have taken $\nabla(1/r) = \mathbf{r}/r^3$ instead of $-\mathbf{r}/r^3$ is that

$$r = [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{1}{2}}$$

and ∇ performs the differentiations with respect to x, y, z, the coordinates of the point P at which φ is being evaluated The coordinates ξ, η, ζ belong to the region R and are the variables of integration, and $\mathbf{r} = (\xi - x)\mathbf{i} + (\eta - y)\mathbf{j} + (\zeta - z)\mathbf{k}$. Hence (263) becomes

$$\varphi = \iiint_R \nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{P}}{r}\right)d\tau - \iiint_R \frac{\nabla\cdot\mathbf{P}}{r}\,d\tau$$

and

$$\varphi = \iint_S \frac{\mathbf{P}}{r} \cdot d\boldsymbol{\sigma} - \iiint_R \frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{r}\, d\tau \tag{264}$$

by applying the divergence theorem

Example 91 Let us find the electric intensity at the center of a uniformly polarized sphere Here $\mathbf{P} = P_0\mathbf{k}$, so that $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$ inside R Hence (264) becomes

$$\varphi(x, y, z) = \iint_S \frac{P_0\mathbf{k} \cdot d\boldsymbol{\sigma}}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

and

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = -\iint_S \frac{P_0(\mathbf{k} \cdot d\boldsymbol{\sigma})[(\xi - x)\mathbf{i} + (\eta - y)\mathbf{j} + (\zeta - z)\mathbf{k}]}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathbf{E}(0, 0, 0) = -\iint_S \frac{(\xi\mathbf{i} + \eta\mathbf{j} + \zeta\mathbf{k})P_0(\mathbf{k} \cdot d\boldsymbol{\sigma})}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{265}$$

Now for points on the sphere,

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \equiv a^2,$$

and letting $\xi = a \sin\theta \cos\varphi$, $\eta = a \sin\theta \sin\varphi$, $\zeta = a \cos\theta$, it is easily seen that (265) reduces to

$$\mathbf{E}(0, 0, 0) = -\tfrac{4}{3}\pi P_0\mathbf{k} \tag{266}$$

$\mathbf{E}$ is independent of the radius of the sphere By superimposing (concentrically) a sphere with an equal but negative polarization, we see that the field at the center of a uniformly polarized shell is zero.

Problems

1 Prove (262)

2 Prove (266)

3 If $\mathbf{M}_1$ and $\mathbf{M}_2$ are the vector moments of two dipoles at A and B, and if $\mathbf{r}$ is the vector from A to B, show that the energy of the system is $W = \mathbf{M}_1\ \mathbf{M}_2 r^{-3} - 3(\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{r})r^{-5}$

4 The dipole-moment density is given by $P = \mathbf{r}$ over a sphere of radius a Calculate the field at the center of the sphere

73. Magnetostatics. The same laws that have held for electrostatics are true for magnetostatics with the exception that $\nabla^2\varphi_m = 0$ always, since we cannot isolate a magnetic charge We make the following correspondences, since all the laws of electrostatics were derived on the assumption of the inverse-square force law, which applies equally well for stationary magnets.

$$\begin{array}{rcl} \textit{Electrostatics} & & \textit{Magnetostatics} \\ \mathbf{E} & \longleftrightarrow & \mathbf{H} \\ q & \longleftrightarrow & q_m \\ \mathbf{D} & \longleftrightarrow & \mathbf{B} \text{ (magnetic induction)} \\ \kappa & \longleftrightarrow & \mu \text{ (permeability)} \\ \mathbf{D} = \kappa\mathbf{E} & \longleftrightarrow & \mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \\ w = \frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} & \longleftrightarrow & w_m = \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B} \\ \nabla\cdot\mathbf{D} = 4\pi\rho & \longleftrightarrow & \nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \end{array} \tag{267}$$

74. Solid Angle. Let $\mathbf{r}$ be the position vector from a point P to a surface of area dS and unit normal $\mathbf{N}$, that is, $d\mathbf{\delta} = \mathbf{N}\, dS$ We define the solid angle subtended at P by the surface dS to be (see Fig 67)

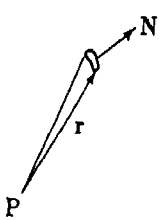

FIG 67

$$d\Omega = \frac{\mathbf{r}\cdot d\mathbf{\delta}}{r^3}$$

The total solid angle of a surface is

$$\Omega = \iint_S \frac{\mathbf{r}\cdot d\mathbf{\delta}}{r^3} \tag{268}$$

Example 92 Let S be a sphere and P the origin so that

$$\Omega(P) = \iint \frac{\mathbf{r}\ \mathbf{r}}{r^4}\, dS = 4\pi$$

Example 93 The magnetic dipole is the exact analogue of the electric dipole We consider a magnetic shell, that is, a thin sheet magnetized uniformly in a direction normal to its surface (Fig 68) Let β be the magnetic moment per unit area and

assume β = constant. The potential at P is given by

$$\varphi = \iint_S \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{M}}{r^3}\,dS = \beta \iint_S \frac{\mathbf{r}\cdot d\boldsymbol{\sigma}}{r^3} = \beta\Omega$$

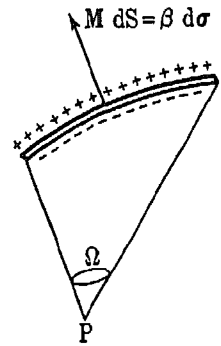

FIG 68

Now let P and Q be opposite points on the negative and positive sides of the surface S We have

$$\varphi(Q) = -\beta(4\pi - \Omega)$$

so that the work done in taking a unit positive pole from a point P on the negative side of the shell to a point Q on the positive side of the shell is given by

$$W = \int_P^Q \mathbf{H}\cdot d\mathbf{r} = -\int_P^Q \nabla\varphi\cdot d\mathbf{r} = \varphi(P) - \varphi(Q)$$
$$= \beta\Omega + \beta(4\pi - \Omega)$$

$$\boxed{W = 4\pi\beta} \tag{269}$$

75. Moving Charges, or Currents. If two conductors at different potentials are joined together by a metal wire, it is found that certain phenomena occur (heating of the wire, magnetic field), so that one is led to believe that a flow of charge is taking place Let $\mathbf{v}$ be the velocity of the charge and ρ the density of charge We define current density by $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ The total charge passing through a surface per unit time is given by

$$\iint_S \rho\mathbf{v}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iint_S \mathbf{j}\cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

Now the total charge inside a closed surface S is $Q = \iiint_R \rho\,d\tau$

If there are no sources or sinks inside S, then the loss of charge per unit time is given by $-\dfrac{\partial Q}{\partial t} = -\iiint_R \dfrac{\partial\rho}{\partial t}\,d\tau$ Thus

$$\iint_S \rho\mathbf{v}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = -\iiint_R \frac{\partial\rho}{\partial t}\,d\tau$$

Applying the divergence theorem, we have

$$\left.\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ \text{or} \qquad \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{270}$$

Equations (270) are the statement of conservation of electric charge We define a steady state as one for which ρ is independent of the time, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, which implies $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$

It has been found by experiment that if $\mathbf{E}$ is the electric field, then

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E} = -\lambda \nabla \varphi \tag{271}$$

where λ is the conductivity of the metal This is Ohm's law For the general case, $j_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3} \lambda_{\alpha\beta} E_\beta$, and the simplest case, $\lambda \equiv$ constant, so that $\nabla^2 \varphi = 0$ for the steady state

We now compute the work done on a charge q as it moves from a point of potential φ_1 to one of potential φ_2, $\varphi_1 > \varphi_2$ The energy at φ_1 is $q\varphi_1$ and at φ_2 is $q\varphi_2$ The loss in energy is

$$W = (\varphi_1 - \varphi_2)q$$

This loss in electrical energy does not go into mechanical energy, since the flow is assumed steady Hence the electrical energy is converted into heat, $Q = (\varphi_1 - \varphi_2)q$ The power loss is $P = \frac{dQ}{dt} = (\varphi_1 - \varphi_2)\frac{dq}{dt}$, and since $\varphi_1 - \varphi_2 = RJ$ (another form of Ohm's law, where R is resistance and J current), we have

$$P = RJ^2 \tag{272}$$

76. Magnetic Effect of Currents (Oersted). Experiments show that electric currents produce magnetic fields The mathematical expression for the magnetic field is given by

$$d\mathbf{H} = \frac{J\mathbf{r} \times d\mathbf{r}}{cr^3} \tag{273}$$

where $\mathbf{r}$ is the vector from the point P, P is the point at which we calculate the magnetic field $d\mathbf{H}$ due to the line current J in that portion of the wire $d\mathbf{r}$, and c is a constant, the ratio of the electrostatic to the electromagnetic unit of charge (see Fig 69) Biot and Savart established this law for straight-line currents

For a closed path

$$\mathbf{H} = \oint \frac{J\mathbf{r} \times d\mathbf{r}}{cr^3} \qquad (274)$$

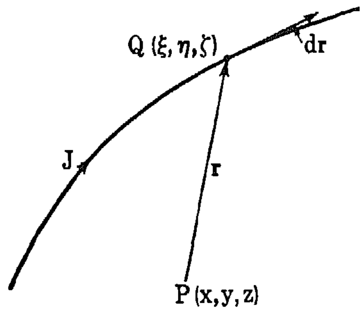

FIG 69

Now $r = [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{1}{2}}$, and $\nabla(1/r) = \mathbf{r}/r^3$, where $\nabla = \mathbf{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$ Hence

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}\oint J\,\nabla\frac{1}{r} \times d\mathbf{r} = \frac{1}{c}\oint \nabla \times \left(\frac{J}{r}\,d\mathbf{r}\right)$$

since ∇ does not operate on $d\mathbf{r}$ and J is a constant Thus $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$, where $\mathbf{A} = (1/c)\oint J\,d\mathbf{r}/r = (1/c)\iiint_\infty \mathbf{j}\,d\tau/r$ is integrated over all space containing currents

Now $\nabla \cdot \mathbf{A} = \iiint_R \nabla \cdot (\mathbf{j}/r)\,d\tau = \iint_S (\mathbf{j}/r) \cdot d\boldsymbol{\sigma}$, so that if all currents lie within a given sphere, we may push the boundary of R to infinity, since nothing new will be added to the integral yielding $\mathbf{A}$. But when S is expanded to a great distance, $\mathbf{j} = 0$ on S, so that that $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ Also

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$$

so that $\nabla \times \mathbf{H} = -\nabla^2\mathbf{A}$. Now since $\mathbf{A} = (1/c)\iiint_\infty \mathbf{j}\,d\tau/r$, or

$A_x = (1/c)\iiint_\infty j_x\,d\tau/r$, $A_y = (1/c)\iiint_\infty j_y\,d\tau/r$,

$$A_z = \frac{1}{c}\iiint_\infty \frac{j_z\,d\tau}{r}$$

we have from Sec 69 that $\nabla^2\mathbf{A} = -(4\pi/c)\mathbf{j}$. Thus

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}} \tag{275}$$

Example 94 The work done in taking a unit magnetic pole around a closed path Γ in a magnetic field due to electric currents is

$$W = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \nabla \times \mathbf{H} \cdot d\mathbf{d} = \frac{4\pi}{c} \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{d}$$

For an electric current J in a wire that loops Γ, we have

$$\boxed{W = \frac{4\pi}{c} J} \tag{276}$$

Example 95. The magnetic field at a point P, r units away from an infinite straight-line wire carrying a current J, is obtained by use of Example 94

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = H(2\pi r) = \frac{4\pi}{c} J \qquad \text{so that} \qquad H = \frac{2J}{cr}$$

Example 96 We compute the dimensions of $c/\sqrt{\kappa\mu}$ Now $f_e = q_e q_e'/\kappa r^2$, and $f_m = q_m q_m'/\mu r^2$ so that

$$\frac{[M][L]}{[T]^2} = \frac{[q_e]^2}{[\kappa][L]^2} = \frac{[q_m]^2}{[\mu][L]^2}$$

and

$$\frac{[J]}{[c]} = \frac{[dq_e/dt]}{[c]} = \frac{[q_e]}{[c][T]} = \frac{[M]^{\frac{1}{2}}[L][\kappa]^{\frac{1}{2}}}{[c][T]^2}$$

From (276),

$$\frac{\text{Work}}{\text{Unit pole}} = \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c} J$$

so that

$$\frac{[M][L]^2}{[q_m][T]^2} = \frac{[J]}{[c]}$$

and

$$\frac{[M]^{\frac{1}{2}}[L]^{\frac{1}{2}}}{[T][\mu]^{\frac{1}{2}}} = \frac{[M]^{\frac{1}{2}}[L]^{\frac{3}{2}}[\kappa]^{\frac{1}{2}}}{[c][T]^2}$$

yielding

$$\left[\frac{c}{\sqrt{\mu\kappa}}\right] = \left[\frac{L}{T}\right]$$

We see that $c/\sqrt{\mu\kappa}$ has the dimensions of speed We shall soon see the significance of this

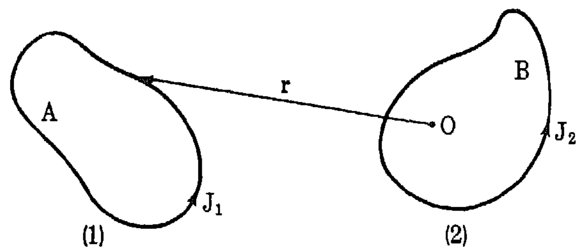

FIG 70

77. Mutual Induction and Action of Two Circuits. Consider two closed circuits with currents J_1 and J_2 (Fig 70) The magnetic field at O due to J_1 is $\mathbf{H}_1 = \nabla \times \mathbf{A}_1$ where

$$\mathbf{A}_1 = \frac{J_1}{c}\int_{(1)} \frac{d\mathbf{r}}{r}$$

We define the mutual inductance of the two circuits as the magnetic flux through the surface B due to a unit current in (1) This is

$$M = \iint_B \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{\delta} = \iint_B \nabla \times \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{\delta}$$

$$= \int_{(2)} \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{c}\int_{(2)}\left(\int_{(1)} \frac{d\mathbf{r}_1}{r}\right) \cdot d\mathbf{r}_2$$

Hence

$$\boxed{M = \frac{1}{c}\int_{(2)}\int_{(1)} \frac{d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2}{r}} \qquad (277)$$

The current element $J_2\, d\mathbf{r}_2$ sets up a magnetic field, so that from Newton's third law of action and reaction, any magnetic

field will act on $J_2\,d\mathbf{r}_2$ with an equal and opposite force Thus

$$d\mathbf{f} = J_2\,d\mathbf{r}_2 \times \mathbf{H}_1 = \frac{J_1 J_2}{c}\left(\int_{(1)} d\mathbf{r}_1 \times \nabla\frac{1}{r}\right) \times d\mathbf{r}_2 \qquad (278)$$

and integrating over (2) we obtain

$$\mathbf{f} = \frac{J_1 J_2}{c}\int_{(2)} d\mathbf{r}_2 \times \int_{(1)} \nabla\frac{1}{r} \times d\mathbf{r}_1$$

Now

$$d\mathbf{r}_2 \times \left(\nabla\frac{1}{r} \times d\mathbf{r}_1\right) = \nabla\frac{1}{r}\,(d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2) - \left(d\mathbf{r}_2 \cdot \nabla\frac{1}{r}\right) d\mathbf{r}_1$$

and $\int_{(2)} [d\mathbf{r}_2 \cdot \nabla(1/r)]\, d\mathbf{r}_1 = \int_{(2)} d(1/r)\, d\mathbf{r}_1 = 0$, so that

$$\boxed{\mathbf{f} = \frac{J_1 J_2}{c}\int_{(2)}\int_{(1)}\left(\nabla\frac{1}{r}\right)(d\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{r}_2)} \qquad (279)$$

This is the force of loop (1) on loop (2) It is equal and opposite to the force of loop (2) on loop (1), this being immediately deducible from (279) when we keep in mind that

$$\nabla\frac{1}{r_{21}} = -\nabla\frac{1}{r_{12}}$$

In (279), $r = r_{21}$

Example 97 We find the force per unit length between two long straight parallel wires carrying currents J_1 and J_2 We use (278) and the result of Example 95 We have $\mathbf{H}_1 = (2J_1/cd)\mathbf{i}$ at right angles to the plane containing the wires Hence

$$d\mathbf{f} = J_2\,d\mathbf{r}_2 \times \frac{2J_1}{cd}\mathbf{i} = \frac{2J_1J_2}{cd}\,d\mathbf{r}_2 \times \mathbf{i}$$

and the force per unit length is $F = 2J_1J_2/cd$ If the currents are parallel, $\mathbf{F}$ is an attractive force, if the currents are opposite, $\mathbf{F}$ is a repulsive force

Problems

1. From (278) show that $\mathbf{f} = J_2 \iint_B d\mathbf{d}_2 \times (\nabla \times \mathbf{H}_1)$.

2. Find the force between an infinite straight-line wire carrying a current J_1 and a square loop of side a with current J_2, the

extended plane of the loop containing the straight-line wire, and the shortest distance from the wire to the loop being d

3 A current J flows around a circle of radius a, and a current J' flows in a very long straight wire in the same plane Show that the mutual attraction is $4\pi JJ'/c(\sec\alpha - 1)$, where 2α is the angle subtended by the circle at the nearest point of the straight wire

4 Show that $\mathbf{A} = (J/c)\iint_S d\boldsymbol{\sigma} \times \nabla(1/r)$ for a current J in a closed loop bounding the area S For a small circular loop, show that $\mathbf{A} = (\mathbf{M} \times \mathbf{r}/r^3)$, where $\mathbf{r}$ is very much larger than the radius of the loop and is the vector to the center of the circle, and where

$$\mathbf{M} = \frac{J}{c}\iint d\boldsymbol{\sigma}$$

78. Law of Induction (Faraday). It has been found by experiment that a changing magnetic field produces an electromotive force in a circuit If $\mathbf{B}$ is the magnetic inductance, the flux through a surface S with boundary curve Γ is given by $\iint_S \mathbf{B}\cdot d\boldsymbol{\sigma}$. The law of induction states that

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\iint \mathbf{B}\cdot d\boldsymbol{\sigma} = \oint_\Gamma \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$$

Applying Stokes's theorem, we have

$$\boxed{-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E}} \tag{280}$$

The time rate of change of magnetic inductance is proportional to the curl of the electric field Equation (280) is a generalization of $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, which is true for the electrostatic case in which $\mathbf{B} = 0$ and for the steady state for which $\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$

79 Maxwell's Equations. Up to the present we have, for an electrostatic field, $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, $\nabla\cdot\mathbf{D} = 4\pi\rho$ and, for stationary currents, $\nabla \times \mathbf{H} = (4\pi/c)\mathbf{j}$, $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$

Now $\nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ is a generalization of $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ Maxwell looked for a generalization of $\nabla \times \mathbf{H} = (4\pi/c)\mathbf{j}$. He decided to retain the two laws, (1) $\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$ as the definition of charge, and (2) $\nabla \cdot \mathbf{j} + \dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ as the law of conservation of charge

Let us assume

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j} + \boldsymbol{\chi}) \tag{281}$$

as a generalization of $\nabla \times \mathbf{H} = (4\pi/c)\mathbf{j}$. We take the divergence of (281) and obtain

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{j} + \nabla \cdot \boldsymbol{\chi} \tag{282}$$

so that

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\chi} &= -\nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{D}) \\ &= \nabla \cdot \left(\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) \end{aligned}$$

We can choose $\boldsymbol{\chi} = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, so that

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\left(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)} \tag{283}$$

We call $\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ the displacement current.

We rewrite Maxwell's equations

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \\ \text{(ii)} & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \text{(iii)} & \nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \text{(iv)} & \nabla \times \mathbf{H} = \dfrac{4\pi}{c}\left(\mathbf{j} + \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) \end{array} \tag{284}$$

We have in addition the equation

$$\text{(v)} \qquad \boxed{\mathbf{f} = \rho\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)} \tag{285}$$

where $\mathbf{f}$ is the force on a charge ρ with velocity $\mathbf{v}$ moving in an electric field $\mathbf{E}$ and magnetic inductance $\mathbf{B}$. This result follows from Sec 77

Problems

1. Show that the equations of motion of a particle of mass m and charge e moving between the plates of a parallel-plate condenser producing a constant field E and subjected to a constant magnetic field H parallel to the plates are

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = Ee - He\frac{dy}{dt}$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = He\frac{dx}{dt}$$

Given that $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dy}{dt} = x = y = 0$ when $t = 0$, show that $x = (E/\omega H)(1 - \cos \omega t)$, $y = (E/\omega H)(\omega t - \sin \omega t)$, where

$$\omega = \frac{He}{m}$$

2 From (iii) of (284) show that $\nabla \cdot \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$.

3 From (i) and (iv) of (284) show that

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{D}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

4 Write down Maxwell's equations for a vacuum where $\mathbf{j} = \rho = 0$, $\mathbf{D} = \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mathbf{H}$.

80. Solution of Maxwell's Equations for "Electrically" Free Space. We have $\rho = \mathbf{j} = 0$ and κ, μ are constants Equations (284) become

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} & \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\
&\text{(ii)} & \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0 \\
&\text{(iii)} & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \qquad (286)\\
&\text{(iv)} & \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{\kappa}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}
\end{aligned}
$$

We take the curl of (iii) and obtain

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c}\nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

or

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\mu\kappa}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}} \qquad (287)$$

by making use of (i) and (iv) Similarly

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{H} = \frac{\mu\kappa}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}} \qquad (287a)$$

Equation (287) represents a three-dimensional vector wave equation To illustrate, consider a wave traveling down the x axis with velocity V and possessing the wave profile $y = f(x)$ at $t = 0$ At any time t it is easy to see that $y = f(x - Vt)$. From $y = f(x - Vt)$ we have $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f''(x - Vt)$ and

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = V^2 f''(x - Vt)$$

so that

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (288)$$

Equation (287) represents three such equations, and $\mu\kappa/c^2$ plays the same role as $1/V^2$, so that $c/\sqrt{\mu\kappa}$ has the dimensions of a velocity (see Example 96) $c = 3 \times 10^{10}$ by experiment

Example 98 We solve the wave equation $\nabla^2 f = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ in spherical coordinates where $f = f(r, t)$

$$\nabla f = f'(r, t)\, \nabla r = f' \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \left(\frac{f'\mathbf{r}}{r}\right) = \frac{f'}{r} \nabla \cdot \mathbf{r} + \nabla \left(\frac{f'}{r}\right) \cdot \mathbf{r}$$

$$= \frac{3f'}{r} + \frac{rf'' - f'}{r^2} \nabla r \cdot \mathbf{r} = f'' + \frac{2}{r} f'$$

Our wave equation is

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tag{289}$$

Now let $u(r, t) = rf(r, t)$, then

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2}{r^3} u$$

and substituting into (289), we obtain

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

of which the most general solution is

$$u(r, t) = g(r - Vt) + h(r + Vt)$$

and so

$$f(r, t) = \frac{1}{r} [g(r - Vt) + h(r + Vt)] \tag{290}$$

is the most general solution of (289)

Let us now try to determine a solution of Maxwell's equations for the case $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, t)$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(x, t)$

Now $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, so that $\dfrac{\partial E_x(x, t)}{\partial x} + \dfrac{\partial E_y(x, t)}{\partial y} + \dfrac{\partial E_z(x, t)}{\partial z} = 0$, which implies $\dfrac{\partial E_x(x, t)}{\partial x} = 0$ We are not interested in a uniform field in the x direction, so we choose $E_x = 0$ Hence

$$\mathbf{E} = E_y(x, t)\mathbf{j} + E_z(x, t)\mathbf{k}$$

and similarly

$$\mathbf{H} = H_y(x, t)\mathbf{j} + H_z(x, t)\mathbf{k}$$

Now we use Eq (iii) of (286), $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$, so that

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t}\mathbf{j} - \frac{\mu}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t}\mathbf{k}$$

or

$$\begin{aligned} &(\text{i}) \qquad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\mu}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t} \\ &(\text{ii}) \qquad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t} \end{aligned} \tag{291}$$

Similarly, on using (iv) of (286), we obtain

$$\begin{aligned} &(\text{i}) \qquad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{\kappa}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t} \\ &(\text{ii}) \qquad \frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{\kappa}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t} \end{aligned} \tag{292}$$

The four unknowns are E_y, E_z, H_y, H_z, which must satisfy (291) and (292) If we choose $H_y = E_z = 0$, we see that (i) of (291) and (ii) of (292) are satisfied Differentiating (ii) of (291) with respect to x and (i) of (292) with respect to t, we obtain

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\mu\kappa}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \tag{293}$$

We leave it to the reader to show that

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{\mu\kappa}{c^2}\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} \tag{294}$$

These equations are of the type represented by (288) Hence a solution to Maxwell's equations is

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= [E_y^{(1)}(x - Vt) + E_y^{(2)}(x + Vt)]\mathbf{j} \\ \mathbf{H} &= [H_z^{(1)}(x - Vt) + H_z^{(2)}(x + Vt)]\mathbf{k} \end{aligned} \tag{295}$$

where $V = c(\mu\kappa)^{-\frac{1}{2}}$

Both waves are transverse waves, that is, they travel down the x axis but have components perpendicular to the x axis

Also note that $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0$, so that $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ are always at right angles to each other

By letting $H_z = E_y = 0$, we can obtain another solution, $\mathbf{E} = E_z(x, t)\mathbf{k}$, $\mathbf{H} = H_y(x, t)\mathbf{j}$. These two solutions are called the two states of polarization, the electric vector being always oriented 90° with the magnetic vector

Example 99 We compute the energy density.

$$w_e = \frac{\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}}{2} = \frac{\kappa \mathbf{E}^2}{2} = \frac{\kappa E_y^2}{2}$$

$$w_m = \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2} = \frac{\mu \mathbf{H}^2}{2} = \frac{\mu H_z^2}{2} = \frac{\kappa E_y^2}{2} = w_e$$

and $w = w_e + w_m = 2w_e = 2w_m = \kappa E_y^2$, and for both waves $w_T = \kappa(E_y^2 + E_z^2)$. We have here used the fact that

$$H_z = \sqrt{\frac{\kappa}{\mu}}\, E_y$$

(see Prob 1)

Example 100 Maxwell's equations in a homogeneous conducting medium are

$$\text{(i)} \qquad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{4\pi\rho}{\kappa}$$

$$\text{(ii)} \qquad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

$$\text{(iii)} \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\text{(iv)} \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\left(\sigma \mathbf{E} + \frac{\kappa}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)$$

Assume a periodic solution of the form

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x, y, z)e^{-i\omega t}$$
$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0(x, y, z)e^{-i\omega t}$$

Substituting into (iv), we obtain

$$e^{-i\omega t}\, \nabla \times \mathbf{H}_0 = \frac{4\pi}{c}\left(\sigma e^{-i\omega t}\mathbf{E}_0 - \frac{i\kappa\omega}{4\pi}\, \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}\right)$$

or

$$\nabla \times \mathbf{H}_0 = \frac{4\pi}{c}\left(\sigma - \frac{i\kappa\omega}{4\pi}\right)\mathbf{E}_0 \tag{296}$$

This equation is the same as that which occurs for "electrically" free space with a complex dielectric coefficient

Problems

1. By letting $E_y = f(x - Vt)$, $H_z = F(x - Vt)$, $V = c/\sqrt{\kappa\mu}$, show that $H_z = \sqrt{\kappa/\mu}\, E_y$

2 Derive (287*a*).

3 Let $r = x - Vt$, $s = x + Vt$, and show that $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{1}{V^2}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ reduces to $\dfrac{\partial^2 y}{\partial r\, \partial s} = 0$ Integrate this equation and show that the general solution of (288) is $y = f(x - Vt) + F(x + Vt)$, where f and F are arbitrary functions

4 Prove that Maxwell's equations for insulators ($\sigma = 0$) are

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\kappa}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad \text{and} \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{297}$$

5 Show that the solution of (297) can be expressed in terms of a single vector $\mathbf{V}$, the Hertzian vector, where

$$\mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) - \frac{\kappa\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial t^2}, \qquad \mathbf{H} = \frac{\kappa}{c}\nabla \times \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}$$

and $\mathbf{V}$ satisfies $\nabla^2\mathbf{V} = \dfrac{\kappa\mu}{c^2}\dfrac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial t^2}$

6 Prove that $\mathbf{E} = \dfrac{\mu}{c}\nabla \times \dfrac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}$, $\mathbf{H} = -\nabla(\nabla \cdot \mathbf{W}) + \dfrac{\kappa\mu}{c^2}\dfrac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial t^2}$ is a solution of (297), provided that $\mathbf{W}$ satisfies $\nabla^2\mathbf{W} = \dfrac{\kappa\mu}{c^2}\dfrac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial t^2}$

7 Derive (294)

8 Look up a proof of the laws of reflection and refraction

9. By considering (i) and (iv) of Example 100, show that

$$\rho = \rho_0 e^{-4\pi\sigma t/\kappa}$$

81. Poynting's Theorem. Our starting point is Maxwell's equations Dot Eq (iii) of (284) with $\mathbf{H}$ and Eq (iv) with $\mathbf{E}$ and subtract, obtaining

$$c(\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}) = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - 4\pi\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{298}$$

Now from (218)

$$\frac{\partial w_e}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \qquad \frac{\partial w_m}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Let us write $\mathbf{j} = \mathbf{j}_G + \mathbf{j}_c$ where $\mathbf{j}_G$ represents the galvanic current and $\mathbf{j}_c = \rho\mathbf{v}$, the conduction current Now

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{j}_c = \mathbf{E}\cdot\rho\mathbf{v} = \rho\mathbf{E}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial w_{\text{mechanical}}}{\partial t} = \frac{\partial w_M}{\partial t}$$

and from Sec 75 it is easy to prove that $\mathbf{E}\cdot\mathbf{j}_G$ is Joule's power loss $= \dfrac{\partial Q}{\partial t}$ Moreover, $\mathbf{H}\cdot\nabla\times\mathbf{E} - \mathbf{E}\cdot\nabla\times\mathbf{H} = \nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$, so that we rewrite (298) as

$$c\,\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = -4\pi\left(\frac{\partial w_e}{\partial t} + \frac{\partial w_m}{\partial t} + \frac{\partial w_M}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial t}\right) \tag{299}$$

Integrating over a volume R and applying the divergence theorem, we obtain

$$\iiint_R \frac{\partial Q}{\partial t}\,d\tau + \frac{c}{4\pi}\iint_S \mathbf{E}\times\mathbf{H}\cdot d\mathbf{\sigma} = -\iiint_R \frac{\partial w}{\partial t}\,d\tau \tag{300}$$

where w is the total energy density.

We define $\mathbf{s} = (c/4\pi)\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ as Poynting's vector Equation (300) states that to determine the time rate of energy loss in a given volume V, we may find the flux through the boundary surface of the vector $\mathbf{s} = (c/4\pi)\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ and add to this the rate of generation of heat within the volume It is natural to interpret Poynting's vector as the density of energy flow.

Problems

1 Find the value of **E** and **H** on the surface of an infinite cylindrical wire carrying a current Show that Poynting's vector represents a flow of energy into the wire, and show that this flow is just enough to supply the energy which appears as heat

2 Find the Poynting vector around a uniformly charged sphere placed in a uniform magnetic field

3 If **E** of Sec 80 is sinusoidal, $\mathbf{E} = E_0 \sin\omega(x - Vt)\mathbf{k}$, find the energy density after finding the magnetic wave **H**.

82 Lorentz's Electron Theory. For charges moving with velocity $\mathbf{v}$, $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$, and Maxwell's equations become

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} && \nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho \\
&\text{(ii)} && \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\
&\text{(iii)} && \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
&\text{(iv)} && \nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\left(\rho\mathbf{v} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)
\end{aligned} \tag{301}
$$

These equations are due to Lorentz From (ii) we can write $\mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{A}_0 + \nabla\chi) = \nabla \times \mathbf{A}$. Substitute this value of $\mathbf{B}$ into (iii) and obtain $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, or its equivalent

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0$$

Thus $\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ is irrotational, so that $\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi$

Let $\mathbf{D} = \kappa\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, and substitute into (iv) We have

$$\frac{1}{\mu}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{4\pi}{c}\left[\rho\mathbf{v} + \frac{\kappa}{4\pi}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)\right]$$

and since $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla^2\mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})$, we obtain

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{\kappa\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu\rho}{c}\mathbf{v} + \nabla\psi \tag{302}$$

where

$$\psi = \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\mu\kappa}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Now

$$
\begin{aligned}
4\pi\rho = \nabla \cdot \mathbf{D} &= \kappa\nabla \cdot \left(-\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) \\
&= -\kappa\nabla^2\varphi - \frac{\kappa}{c}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\mu\kappa}{c}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right)
\end{aligned}
$$

so that

$$\nabla^2\varphi - \frac{\kappa\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\rho}{\kappa} - \frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t} \tag{303}$$

Equations (302) and (303) would be very much simplified if we could make $\psi \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\kappa\mu}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$ This is called the equation of gauge invariance Let us see if this is possible

Now $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}_0$ and $\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}_0}{\partial t} = -\nabla\varphi_0$ so that

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}_0}{\partial t} - \nabla\varphi_0 = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi$$

where $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \nabla\chi$ Thus

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{A}_0}{\partial t}\right) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\chi = \nabla(\varphi_0 - \varphi)$$

and

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t} = \varphi_0 - \varphi + \text{constant}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = \frac{\partial\varphi_0}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

Now we desire

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\kappa\mu}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

$$= \nabla \cdot \mathbf{A}_0 + \nabla^2\chi + \frac{\kappa\mu}{c}\left[\frac{\partial\varphi_0}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}\right]$$

or

$$\nabla^2\chi - \frac{\kappa\mu}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = -\nabla \cdot \mathbf{A}_0 - \frac{\kappa\mu}{c^2}\frac{\partial\varphi_0}{\partial t} \tag{304}$$

The right-hand side of (304) is a known function of x, y, z, t. This equation is called the inhomogeneous wave equation, and if the equation of gauge invariance is to hold, we must be able to solve it If we can solve it, the Lorentz equations will reduce to four inhomogeneous wave equations and so will also be solvable They are

$$\begin{aligned} \nabla^2\mathbf{A} - \frac{\kappa\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi\mu\rho}{c}\mathbf{v} \\ \nabla^2\varphi - \frac{\kappa\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{\kappa}\rho \end{aligned} \tag{305}$$

Problems

1. For the Lorentz transformations (see Prob 11, Sec 24), show that

$$\Box\varphi \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial \bar{z}^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial \bar{t}^2}$$

We call $\Box$ the D'Alembertian

2. Consider the four-dimensional vector $C_i = (A_1, A_2, A_3, -\varphi)$, $i = 1, 2, 3, 4$, the A_i satisfying $\nabla^2\mathbf{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}$, while φ satisfies $\nabla^2\varphi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$, with $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$, and $\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi$. Let $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, $x^4 = ct$, and show that

$$F_{ij} \equiv \left(\frac{\partial C_i}{\partial x^j} - \frac{\partial C_j}{\partial x^i}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -H_z & H_y & -E_x \\ H_z & 0 & -H_x & -E_y \\ -H_y & H_x & 0 & -E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{pmatrix}$$

Show that $\sum_{j=1}^{4} \frac{\partial F^{ij}}{\partial x^j} = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, yields $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ and $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, $F^{ij} = -F_{ij}$, i or $j = 4$, otherwise $F^{ij} = F_{ij}$ Also show that

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} = 0, \qquad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, 4$$

yields $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ and $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$

3 If $\bar{F}_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{4}\sum_{\beta=1}^{4} F_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j}$, show that for the Lorentz transformations $\bar{F}_{12} \equiv -\bar{H}_z = \frac{-H_z - (V/c)E_y}{[1 - (V^2/c^2)]^{\frac{1}{2}}}$. Complete the matrix $\bar{F}_{ij}$

83. Retarded Potentials. Kirchhoff's Solution of

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi F(x, y, z, t)$$

To find the solution $\varphi(P, t)$ of the inhomogeneous wave equation at $t = 0$, we surround the point P by a small sphere Σ of

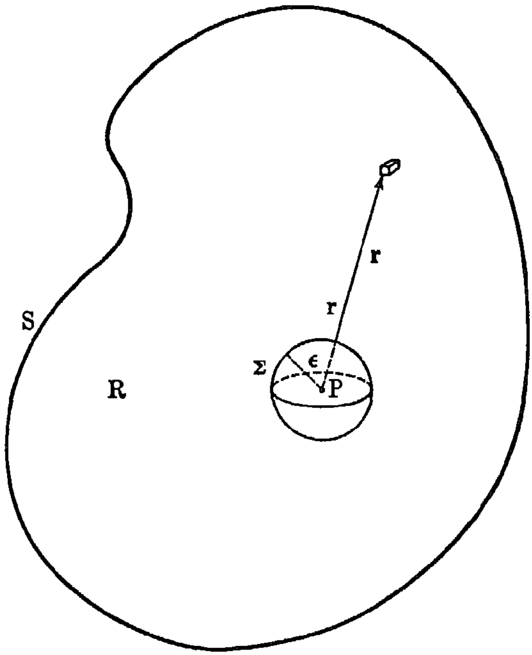

FIG 71

radius ϵ, and let S be the surface of a region R containing P (see Fig 71) We apply Green's formula to this region

$$\iiint\limits_R (\psi \nabla^2\varphi - \varphi \nabla^2\psi)\, d\tau = \iint\limits_\Sigma (\psi \nabla\varphi - \varphi \nabla\psi) \cdot d\mathbf{\sigma} + \iint\limits_S (\psi \nabla\varphi - \varphi \nabla\psi) \cdot d\mathbf{\sigma} \quad (306)$$

We choose for ψ a solution of $\nabla^2\psi - \dfrac{1}{V^2}\dfrac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$ We know that $\psi = f(r + Vt)/r$ is one such solution, where f is arbitrary Equation (306) now becomes

$$\frac{1}{V^2}\iiint\limits_R \left(\psi\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \varphi\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right) d\tau - 4\pi \iiint\limits_R F\psi\, d\tau = \iint\limits_\Sigma \cdot\ \cdot + \iint\limits_S \cdot\ \cdot \quad (307)$$

Equation (307) is true for all values of t so that we may integrate (307) with respect to t between limits $t = t_1$ and $t = t_2$ We obtain

$$\frac{1}{V^2}\iiint_R \left[\psi \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]_{t_1}^{t_2} d\tau - 4\pi \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_R F\psi\, d\tau$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\iint_\Sigma \quad \cdot + \iint_S \qquad \right) \tag{308}$$

Now on Σ, $\psi = (1/\epsilon)f(\epsilon + Vt)$ and

$$\nabla\psi \cdot d\mathbf{d} = -\left.\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|_{r=\epsilon} = \frac{1}{\epsilon^2}[f(\epsilon + Vt) - \epsilon f'(\epsilon + Vt)]\, dS$$

so that (308) reduces to

$$\frac{1}{V^2}\iiint_R \left[\frac{f(r + Vt)}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varphi\frac{Vf'(r + Vt)}{r}\right]_{t_1}^{t_2} d\tau$$
$$- 4\pi \iiint_R \int_{t_1}^{t_2} \frac{Ff(r + Vt)}{r}\, dt\, d\tau = \int_1^{t_2} dt \left\{\iint_\Sigma \left[\frac{f(\epsilon + Vt)}{\epsilon}\nabla\varphi\right.\right.$$
$$\left.\left. + \varphi\frac{\epsilon f'(\epsilon + Vt) - f(\epsilon + Vt)}{\epsilon^2}\mathbf{R}\right]\cdot d\mathbf{d} + \iint_S \cdot\ \cdot \right\} \tag{309}$$

Let us now return to a consideration of $f(r + Vt)$ Since f is arbitrary, let us choose $f \equiv 0$ for $|r + Vt| > \delta$, with the additional restriction that $\int_{-\delta}^{\delta} f(r + Vt)\, d(r + Vt) = 1$, where δ is arbitrary for the moment Notice that $f' \equiv 0$ for $|r + Vt| > \delta$

Now let us choose $t_2 > 0$ and t_1 negatively large, so that for all values of r in the region R, $|r + Vt| > \delta$ Hence

$$\left[\frac{f(r + Vt)}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varphi\frac{Vf'(r + Vt)}{r}\right]_{t_1}^{t_2} = 0$$

since $|r + Vt_2| > \delta$, $|r + Vt_1| > \delta$

Moreover

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{F}{r} f(r + Vt)\, dt = \frac{1}{V}\int_{t_1}^{t_2} \frac{F}{r} f(r + Vt)\, d(r + Vt)$$
$$= \frac{1}{V}\int_{-\delta}^{\delta} \frac{F}{r} f(x)\, dx \tag{310}$$

for a fixed r Now if δ is chosen very small, the value of (310) reduces to approximately

$$\frac{1}{V}\left(\frac{F}{r}\right)_{x=0}\int_{-\delta}^{\delta} f(x)\,dx = \frac{1}{V}\left(\frac{F}{r}\right)_{t=-r/V}$$

Hence the left-hand side of (309) reduces to

$$-\frac{4\pi}{V}\iiint_R \left(\frac{F}{r}\right)_{t=-r/V} d\tau \tag{311}$$

Now considering the right-hand side of (309), we see that

$$\lim_{\epsilon\to 0}\iint_\Sigma \left[\frac{f(\epsilon + Vt)}{\epsilon}\nabla\varphi + \varphi\frac{f'(\epsilon+Vt)}{\epsilon}\mathbf{R}\right]\cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0$$

since $d\boldsymbol{\sigma}$ is of the order ϵ^2, and $f, f', \varphi, \nabla\varphi$ are bounded for a fixed δ We also have that

$$\lim_{\epsilon\to 0} -\int_{t_1}^{t_2} dt \iint_\Sigma \frac{\varphi f(\epsilon + Vt)}{\epsilon^2}\,dS = -\frac{1}{V}4\pi\varphi(P) \tag{312}$$

since $\iint_\Sigma dS = 4\pi\epsilon^2$, and for small δ,

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi f(\epsilon + Vt)\,d(\epsilon + Vt) = \int_{-\delta}^{\delta}\varphi f(x)\,dx \approx \varphi(P)$$

Finally,

$$\begin{aligned}
&\iint_S \int_{t_1}^{t_2} dt\left[\frac{f(r+Vt)}{r}\nabla\varphi - \varphi\left(\frac{rf'-f}{r^2}\right)\nabla r\right]\cdot d\boldsymbol{\sigma} \\
&\quad = \iint_S \int_{t_1}^{t_2} dt\left[\frac{f(r+Vt)}{r}\nabla\varphi + \frac{\varphi f}{r^2}\nabla r\right]\cdot d\boldsymbol{\sigma} \\
&\quad - \iint_S \int_{t_1}^{t_2} dt\,\frac{\varphi}{r}f'(\nabla r\cdot d\boldsymbol{\sigma}) = \iint_S \int_{t_1}^{t_2} dt\left[\frac{f(r+Vt)}{r}\nabla\varphi\right. \\
&\quad \left. + \frac{\varphi f}{r^2}\nabla r\right]\cdot d\boldsymbol{\sigma} + \iint_S \int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{rV}f\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dt\,(\nabla r\cdot d\boldsymbol{\sigma})
\end{aligned} \tag{313}$$

on integrating by parts and noticing that $f]_{t_1}^{t_2} = 0$. Finally the right-hand side of (313) becomes equivalent to

$$\frac{1}{V}\iint_S \left(\frac{1}{r}\nabla\varphi\bigg|_{t=-r/V} - \varphi\bigg|_{t=-r/V}\nabla\frac{1}{r} + \frac{1}{rV}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\bigg|_{t=-r/V}\nabla r\right)\cdot d\boldsymbol{\sigma} \tag{314}$$

Combining (311), (312), and (314), we obtain

$$\varphi(P) = \iiint_R \frac{F}{r}\bigg|_{t=-r/V} d\tau - \frac{1}{4\pi}\iint_S \left(\frac{\nabla\varphi}{r} - \varphi\,\nabla\frac{1}{r} + \frac{1}{rV}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\nabla r\right)_{t=-r/V} \cdot d\mathbf{d} \tag{315}$$

Now let S recede to infinity and assume that φ, $\nabla\varphi$, $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, when evaluated at $t = -r/V$ on the surface S, have the value zero until a definite time T For large r, $t = -r/V$ is negative and so is always less than T Hence the surface element vanishes, and

$$\varphi(P) = \iiint_\infty \frac{F}{r}\bigg|_{t=-r/V} d\tau \tag{316}$$

The solutions to (305) are thus seen to be

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(P, t) &= \iiint_\infty \frac{\mu\rho\mathbf{v}}{cr}\bigg|_{t-(r/V)} d\tau \\ \varphi(P, t) &= \iiint_\infty \frac{\rho}{\kappa r}\bigg|_{t-(r/V)} d\tau\end{aligned} \tag{317}$$

where $V = c/\sqrt{\mu\kappa}$

Finally,

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi\end{aligned} \tag{318}$$

The physical interpretation of these results is simple The values of the magnetic and electric intensities at any particular point P at any instant t are, in general, determined not by the state of the rest of the field (ρ, $\mathbf{v}$) at that particular instant, but by its previous history The effects at P, due to elements at a distance r from P, depend on the state of the element at a previous time $t - (r/V)$. This is just the difference in time required for the waves to travel from the element to P with the velocity $V = c/\sqrt{\mu\kappa}$, hence the name retarded potential Had we considered the function $f(r - Vt)$, we should have obtained a solution depending on the advanced potentials Physically this is impossible, since future events cannot affect past events!

Problem

1 A short length of wire carries an alternating current, $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v} = I_0 (\sin \omega t)\mathbf{k}$, $-l/2 \leqq z \leqq l/2$.

(a) At distances far removed from the wire, show that

$$\mathbf{A} = \frac{I_0 l}{cr} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c}\right) \mathbf{k}$$

and that in spherical coordinates

$$A_r = \frac{I_0 l}{cr} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c}\right) \cos \theta$$

$$A_\theta = -\frac{I_0 l}{cr} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c}\right) \sin \theta$$

$$A_\varphi = 0$$

(b) Show that $H_r = H_\theta = 0$, and that

$$H_\varphi = \frac{I_0 l}{cr} \sin \theta \left[\frac{\omega}{c} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c}\right)\right]$$

(c) Find φ from the equation of gauge invariance, and then E_r, E_θ, E_φ from $\mathbf{E} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\varphi$

CHAPTER 6

MECHANICS

84. Kinematics of a Particle We shall describe the motion of a particle relative to a cartesian coordinate system The motion of any particle is known when $\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ is known, where t is the time We have seen that the velocity and acceleration, relative to this frame of reference, will be given by

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}$$

The velocity may also be given by $\mathbf{v} = v\mathbf{t}$, where v is the speed and $\mathbf{t}$ is the unit tangent vector to the curve $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ Differentiating, we obtain

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{t} + v\frac{d\mathbf{t}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{t} + \kappa v^2\mathbf{n} \tag{319}$$

by making use of (95) Analyzing (319), we see that the acceleration of the particle can be resolved into two components a tangential acceleration of magnitude $\frac{dv}{dt}$, and a normal acceleration of magnitude $v^2\kappa = v^2/\rho$ This latter acceleration is called centripetal acceleration and is due to the fact that the velocity vector is changing direction, and so we expect the curvature to play a role here

For a particle moving in a plane, we have seen in Sec 17, Example 18, that the acceleration may be given by

$$\mathbf{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\mathbf{R} + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\mathbf{P}$$

Example 101 Let us assume that a particle moves in a plane and that its acceleration is only radial In this case we must have $\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0$, and integrating, $\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = h =$ constant. From the calculus we know that the sectoral area is given by $dA = \frac{1}{2}r^2\,d\theta$ (see Fig 72) Thus $\frac{dA}{dt} =$ constant, so that equal areas are swept out in equal intervals of time

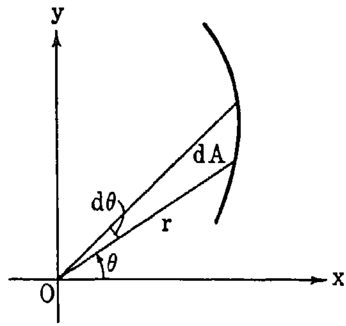

FIG 72

Example 102 For a particle moving around a circle $r = b$ with constant angular speed $\omega_0 = \frac{d\theta}{dt}$, we have $\frac{dr}{dt} = 0$ and $\frac{d}{dt}(r^2\omega_0) = 0$, so that $\mathbf{a} = -b\omega_0^2\mathbf{R}$.

Example 103. To find the tangential and normal components of the acceleration if the velocity and acceleration are known

$$\mathbf{v} = v\mathbf{t}, \qquad \mathbf{a} = a_t\mathbf{t} + a_n\mathbf{n}$$

and

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{v} = va_t \qquad \text{so that} \qquad a_t = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{v}$$

Also

$$\mathbf{a}\times\mathbf{v} = va_n\mathbf{n}\times\mathbf{t} = -va_n\mathbf{b}$$

and

$$a_n = \frac{|\mathbf{a}\times\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$$

Problems

1. A particle moves in a plane with no radial acceleration and constant angular speed ω_0 Show that $r = Ae^{\omega_0 t} + Be^{-\omega_0 t}$

2 A particle moves according to the law

$$\mathbf{r} = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$

Find the tangential and normal components of the acceleration

3 A particle describes the circle $r = a \cos \theta$ with constant speed Show that the acceleration is constant in magnitude and directed toward the center of the circle

4 A particle P moves in a plane with constant angular speed ω about O. If the rate of increase of its acceleration is parallel to OP, prove that $\dfrac{d^2r}{dt^2} = \frac{4}{9}r\omega^2$

5 If the tangential and normal components of the acceleration of a particle moving in a plane are constant, show that the particle describes a spiral

85. Motion about a Fixed Axis. In Sec 10, Example 12, we saw that the velocity is given by $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Differentiating, we obtain

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}$$

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} \tag{320}$$

where $\boldsymbol{\alpha}$ is the angular acceleration $\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$ Since $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, we have also

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$$
$$= (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} - \omega^2\mathbf{r} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$$

If we take the origin on the line of $\boldsymbol{\omega}$ in the plane of the motion, then $\boldsymbol{\omega}$ is perpendicular to $\mathbf{r}$ or $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r} = 0$, so that

$$\mathbf{a} = -\omega^2\mathbf{r} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$$

$\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$ is the tangential acceleration, and $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ is the centripetal acceleration

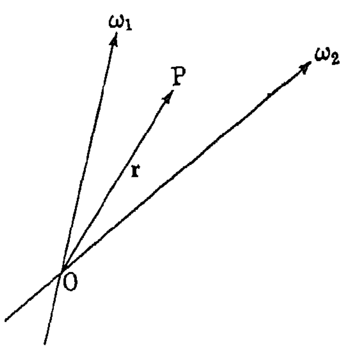

FIG 73

If we assume that a particle P is rotating about two intersecting lines simultaneously, with angular velocities $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$ (Fig 73), we can choose our origin at the point of intersection so that

$$\mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}, \qquad \mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}$$

and the total velocity is

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}$$

A particle on a spinning top that is also precessing experiences such motion

86. Relative Motion. Let A and B be two particles traversing curves Γ_1 and Γ_2 (Fig 74) $\mathbf{r}_1$ and $\mathbf{r}_2$ are the vectors from a point O to A and B, respectively

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r} + \mathbf{r}_1 \tag{321}$$

Definition. $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ is the relative velocity of B with respect to A, written $\mathbf{V}_A(B)$.

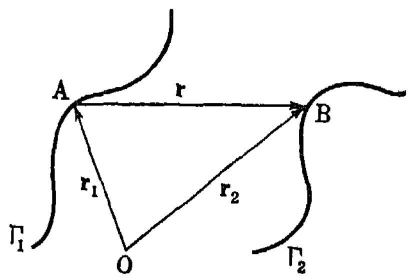

FIG 74

Differentiating (321), we have

$$\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}$$

or

$$\boxed{\mathbf{V}_O(B) = \mathbf{V}_A(B) + \mathbf{V}_O(A)} \tag{322}$$

More generally, we have

$$\mathbf{V}_O(A) = \mathbf{V}_{A_1}(A) + \mathbf{V}_{A_2}(A_1) + \mathbf{V}_{A_3}(A_2) + \qquad + \mathbf{V}_{A_n}(A_{n-1}) + \mathbf{V}_O(A_n)$$

It is important to note that $\mathbf{V}_A(B) = -\mathbf{V}_B(A)$

Example 104 A man walks eastward at 3 miles per hour, and the wind appears to come from the north He then decreases his speed to 1 mile per hour and notices that the wind comes from the northwest (Fig 75) What is the velocity of the wind?

We have

$$\mathbf{V}_G(W) = \mathbf{V}_M(W) + \mathbf{V}_G(M) \qquad G(\text{ground})$$

In the first case

$$\mathbf{V}_M(W) = -k\mathbf{j}, \qquad \mathbf{V}_G(M) = 3\mathbf{i}$$

so that

$$\mathbf{V}_G(W) = -k\mathbf{j} + 3\mathbf{i}$$

In the second case,

$$\mathbf{V}_M(W) = h(\mathbf{i} - \mathbf{j}), \qquad \mathbf{V}_G(M) = \mathbf{i}$$

so that

$$\mathbf{V}_G(W) = h(\mathbf{i} - \mathbf{j}) + \mathbf{i} = (h + 1)\mathbf{i} - h\mathbf{j},$$

and

$$3 = h + 1, \qquad -k = -h, \qquad \mathbf{V}_G(W) = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$$

The speed of the wind is $\sqrt{13}$ miles per hour, and its direction makes an angle of $\tan^{-1} \frac{3}{2}$ with the south line

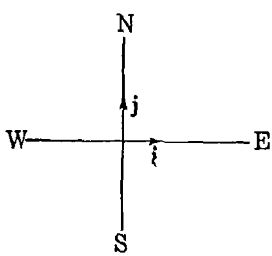

Fig 75

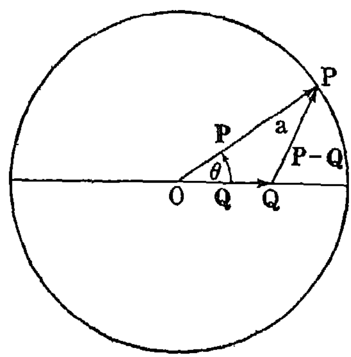

Fig 76

Example 105 To find the relative motion of two particles moving with the same speed v, one of which describes a circle of radius a while the other moves along the diameter (Fig 76). We have

$$\mathbf{P} = a \cos \theta\, \mathbf{i} + a \sin \theta\, \mathbf{j}, \qquad a\frac{d\theta}{dt} = v$$

$$\mathbf{Q} = (a - vt)\mathbf{i}$$

This assumes that both particles started together

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} - \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \left(- a \sin \theta \frac{d\theta}{dt} + v\right)\mathbf{i} + a \cos \theta \frac{d\theta}{dt}\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{V}_Q(P) = v(1 - \sin \theta)\mathbf{i} + v \cos \theta\, \mathbf{j}$$

The relative speed is

$$|\mathbf{V}_Q(P)| = [v^2(1 - \sin\theta)^2 + v^2\cos^2\theta]^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}v(1 - \sin\theta)^{\frac{1}{2}}$$

Maximum $|\mathbf{V}_Q(P)|$ occurs at $\theta = 3\pi/2$, minimum at $\theta = \pi/2$

Problems

1 A man traveling east at 8 miles per hour finds that the wind seems to blow from the north On doubling his speed, he finds that it appears to come from the northeast Find the velocity of the wind

2 A, B, C are on a straight line, B midway between A and C It then takes A 4 minutes to catch C, and B catches C in 6 minutes How long does it take A to catch up to B?

3 An airplane has a true course west and an air speed of 200 miles per hour The wind speed is 50 miles per hour from 130° Find the heading and ground speed of the plane

87. Dynamics of a Particle. Up to the present, nothing has been said of the forces that produce or cause the motion of a particle Experiment shows that for a particle to acquire an acceleration relative to certain types of reference frames, there must be a force acting on the particle The types of forces encountered most frequently are (1) mechanical (push, pull), (2) gravitational, (3) electrical, (4) magnetic, (5) electromagnetic We shall be chiefly concerned with forces of the types (1) and (2) For the present we shall assume Newton's laws of motion hold for motion relative to the earth Afterward we shall modify this Newton's laws are

(*a*) A particle free from the action of forces will remain fixed or will continue to move in a straight line with constant speed

(*b*) Force is proportional to time rate of change of momentum, that is, $\mathbf{f} = \dfrac{d}{dt}(m\mathbf{v})$. In general, m = constant, so that

$$\mathbf{f} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}$$

The factor m is found by experiment to be an invariant for a given particle and is called the mass of the particle In the theory of relativity, m is not a constant $m\mathbf{v}$ is called the *momentum*

(*c*) If A exerts a force on B, then B exerts an equal and opposite force on A This is the law of action and reaction $\mathbf{f}_{AB} = -\mathbf{f}_{BA}$.

By a particle we mean a finite mass occupying a point in our Euclidean space This is a purely mathematical concept, and physically we mean a mass occupying negligible volume as compared to the distance between masses For example, the earth and sun may be thought of as particles in comparison to their distance apart, to a first approximation.

88. Equations of Motion for a Particle. Newton's second law may be written $\mathbf{f} = m\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}$. We postulate that the forces acting on a particle behave as vectors This is an experimental fact. Hence if $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ act on m, its acceleration is given by

$$\mathbf{a} = \frac{1}{m}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \cdots + \mathbf{f}_n) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{f}_i = \frac{\mathbf{f}}{m}$$

We may also write $\mathbf{f} = m\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$, where $\mathbf{r}$ is the position vector from the origin of our coordinate system to the particle If the particle is at rest or is moving with constant velocity, then $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = 0$, and so $\mathbf{f} = 0$, and conversely Hence a necessary and sufficient condition that a particle be in static equilibrium is that the vector sum of the forces acting on it be zero

A standard body is taken as the unit mass (pound mass) A poundal is the force required to accelerate a one-pound mass one foot per second per second The mass of any other body can be compared with the unit mass by comparing the weights (force of gravity at mean sea level) of the two objects This assumes the equivalence of gravitational mass and inertial mass

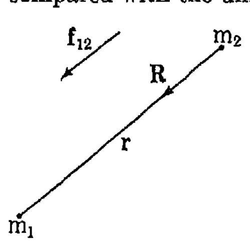

FIG 77

Example 106 Newton's law of gravitation for two particles is that every pair of particles in the universe exerts a mutual attraction with a force directed along the line joining the particles, the magnitude of the force being inversely proportional to the square of the distance between them and directly proportional to the product of their masses $\mathbf{f}_{12} = (Gm_1m_2/r^2)\mathbf{R}$ (see Fig 77) G is a universal constant Let

the mass of the sun be M and that of the earth be m We shall assume that the sun is fixed at the origin of a given coordinate system (Fig 78) The force acting on the earth due to the sun is

$$\mathbf{f} = -(GmM/r^3)\mathbf{r}$$

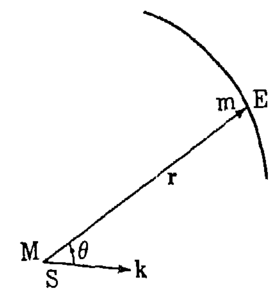

FIG 78

From the second law

$$-\frac{GmM}{r^3}\mathbf{r} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

so that

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r} \qquad (323)$$

Now

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{v}) = \mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

and hence

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{v}) = \mathbf{r}\times\left(-\frac{GM}{r^3}\mathbf{r}\right) = 0$$

This implies

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{r}\times\mathbf{v} &= \mathbf{h} = \text{constant vector} \\ \text{or} \qquad \mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{h} \end{aligned}\right\} \qquad (324)$$

Since $|\mathbf{r}\times d\mathbf{r}|$ = twice sectoral area, we have $2\dfrac{dA}{dt} = |\mathbf{h}|$, or equal areas are swept out in equal intervals of time This is Kepler's first law of planetary motion Moreover, $\mathbf{r}\cdot\left[\mathbf{r}\times\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right] = \mathbf{r}\cdot\mathbf{h} = 0$, so that $\mathbf{r}$ remains perpendicular to the fixed vector $\mathbf{h}$, and the motion is planar. Now

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}\times\mathbf{h} = -\frac{GM\mathbf{r}}{r^3}\times\mathbf{h} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{v})$$

from (324), and $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{v}\times\mathbf{h}) = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt}\times\mathbf{h}$, so that

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}\times\mathbf{h}) = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{v}) \qquad (325)$$

Now $\mathbf{r} = r\mathbf{R}$, where $\mathbf{R}$ is a unit vector Hence

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = r\frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{dr}{dt}\mathbf{R}$$

so that (325) becomes

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \times \mathbf{h}) &= -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r} \times \left(\mathbf{r} \times r\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right) \\ &= -GM\mathbf{R} \times \left(\mathbf{R} \times \frac{d\mathbf{R}}{dt}\right) \\ &= -GM\left[\left(\mathbf{R} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt}\right)\mathbf{R} - \mathbf{R}^2\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right] \\ &= GM\frac{d\mathbf{R}}{dt} \end{aligned} \tag{326}$$

since $\mathbf{R}$ is a unit vector

Integrating (326), we obtain

$$\mathbf{v} \times \mathbf{h} = GM\mathbf{R} + \mathbf{k}$$

and

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) &= \mathbf{r} \cdot (GM\mathbf{R} + \mathbf{k}) \\ (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{h} &= GMr + \mathbf{r} \cdot \mathbf{k} \\ h^2 &= GMr + \mathbf{r} \cdot \mathbf{k} \\ h^2 &= GMr + rk\cos(\mathbf{R}, \mathbf{k}) \end{aligned} \tag{327}$$

Thus

$$r = \frac{h^2/GM}{1 + (k/GM)\cos(\mathbf{r}, \mathbf{k})} \tag{328}$$

We choose the direction of the constant vector $\mathbf{k}$ as the polar axis, so that

$$r = \frac{h^2/GM}{1 + (k/GM)\cos\theta} \tag{329}$$

This is the polar equation of a conic section For the planets these conic sections are closed curves, so that we obtain Kepler's second law, which states that the orbits of the planets are ellipses with the sun at one of the foci

Let us now write the ellipse in the form

$$r = \frac{ep}{1 + e\cos\theta} \qquad \text{where } e = \frac{k}{GM}, \ p = \frac{h^2}{k}$$

The curve crosses the polar axis at $\theta = 0$, $\theta = \pi$ so that the length of the major axis is

$$2a = \frac{ep}{1+e} + \frac{ep}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2} = \frac{2h^2}{GM(1-e^2)}$$

For an ellipse, $b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - e^2a^2$, or $b = a(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}$ The area of the ellipse is $A = \pi ab = \pi a^2(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}$, and since $\dfrac{dA}{dt} = \frac{1}{2}h$, the period for one complete revolution is

$$T = \frac{2A}{h} = \frac{2\pi a^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}G^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{G^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}}$$

Thus

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \equiv \text{constant, for all planets} \tag{330}$$

This is Kepler's third law, which states that the squares of the periods of revolution of the planets are proportional to the cubes of the mean distances from the sun

Problems

1 A particle of mass m is attracted toward the origin with the force $\mathbf{f} = -(k^2m/r^6)\mathbf{r}$. If it starts from the point $(a, 0)$ with the speed $v_0 = k/2^{\frac{1}{2}}a^2$ perpendicular to the x axis, show that the path is given by $r = a \cos \theta$

2 A bead of mass m slides along a smooth rod which is rotating with constant angular speed ω, the rod always lying in a horizontal plane Find the reaction between bead and rod

3 A particle of mass m is attracted toward the origin with a force $-(mk^2/r^3)\mathbf{R}$. If it starts from the point $(a, 0)$ with velocity $v_0 > k/a$ perpendicular to the x axis, show that the equation of the path is

$$r = a \sec \left[\frac{(a^2v_0{}^2 - k^2)^{\frac{1}{2}}}{av_0} \theta \right]$$

4 In a uniform gravitational field (earth), a 16-pound shot leaves the putter's fingers 7 feet from the ground At what angle should the shot leave to attain a maximum horizontal distance?

5. Assume a comet starts from infinity at rest and is attracted toward the sun Let r_0 be its least distance to the sun Show that the motion of the comet is given by $r = 2r_0/(1 + \cos\theta)$

89. System of Particles. Let us consider a system consisting of a finite number of particles moving under the action of various forces A given particle will be under the influence of two types of forces: (1) internal forces, that is, forces due to the interaction of the particle with the other particles of the system, and (2) all other forces acting on the particle, said forces being called external forces

If $\mathbf{r}_j$ is the position vector to the particle of mass m_j, then we shall designate $\mathbf{f}_j^{(e)}$ as the sum of the external forces acting on the jth particle, and $\mathbf{f}_j^{(i)}$ as the sum of the internal forces acting on this particle Newton's second law becomes for this particle

$$\mathbf{f}_j^{(e)} + \mathbf{f}_j^{(i)} = m_j \frac{d^2\mathbf{r}_j}{dt^2} \tag{331}$$

Unfortunately, we do not know, in general, $\mathbf{f}_j^{(i)}$, so that we shall not try to find the motion of each particle but shall look rather for the motion of the system as a whole Since Eq (331) is true for each j, we can sum up j for all the particles This yields

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{f}_j^{(e)} + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{f}_j^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} m_j \frac{d^2\mathbf{r}_j}{dt^2}$$

From Newton's third law we know that for every internal force there is an equal and opposite reaction, so that $\sum_{j=1}^{n} \mathbf{f}_j^{(i)} = 0$ This leaves

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{f}_j^{(e)} = \sum_{j=1}^{n} m_j \frac{d^2\mathbf{r}_j}{dt^2} \tag{332}$$

We now define a new vector, called the center-of-mass vector, by the equation

$$\mathbf{r}_c = \bar{\mathbf{r}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} m_j\mathbf{r}_j}{\sum_{j=1}^{n} m_j} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{n} m_j\mathbf{r}_j \tag{333}$$

The end point of $\mathbf{r}_c$ is called the center of mass of the system It is a geometric property and depends only on the position of the particles Differentiating (333) twice with respect to time, we obtain

$$M\frac{d^2\mathbf{r}_c}{dt^2} = \sum_{j=1}^{n} m_j \frac{d^2\mathbf{r}_j}{dt^2}$$

so that (332) becomes

$$\boxed{\mathbf{f} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{f}_j^{(e)} = M\frac{d^2\mathbf{r}_c}{dt^2}} \qquad (334)$$

Equation (334) states that the center of mass of the system accelerates as if the total mass were concentrated there and all the external forces acted at that point

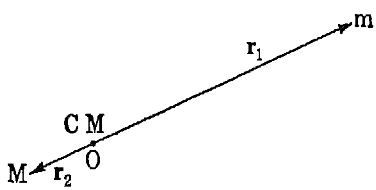

FIG 79

Example 107 If our system is composed of two particles in free space and if they are originally at rest, then the center of mass will always remain at rest, since $\mathbf{f} = 0$ so that $\dfrac{d^2\mathbf{r}_c}{dt^2} = 0$, and $\mathbf{r}_c \equiv$ *constant* satisfies the equation of motion and the initial condition $\dfrac{d\mathbf{r}_c}{dt} = 0$ For the earth and sun we may choose the center of mass as the origin of our coordinate system (Fig 79) The equations of motion for earth and sun are

$$m\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = -\frac{GmM\mathbf{R}}{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2}, \qquad M\frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = \frac{GmM\mathbf{R}}{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2}$$

Since $\mathbf{r}_c = 0$, we have $m\mathbf{r}_1 + M\mathbf{r}_2 = 0$, and

$$\frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = \frac{-GM}{[1 + (m/M)]^2}\frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3}$$

This shows that m is attracted toward the center of mass by an inverse-square force The results of Example 106 hold by replacing M by $M[1 + (m/M)]^{-2}$.

Problems

1. Show that the center of mass is independent of the origin of our coordinate system

2 Particles of masses 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 are placed at the corners of a unit cube Find the center of mass

3 Find the center of mass of a uniform hemisphere

4 Find the force of attraction of a hemisphere on another hemisphere, the two hemispheres forming a full sphere

90. Momentum and Angular Momentum. The momentum of a particle of mass m and velocity $\mathbf{v}$ is defined as $\mathbf{M} = m\mathbf{v}$. The total momentum of a system of particles is given by $\mathbf{M} = \sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{v}_j$. We have at once that

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \sum_{j=1}^{n} m_j \frac{d\mathbf{v}_j}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{f}_j^{(e)} = \mathbf{f} \tag{335}$$

We emphasize again that the mass of each particle is assumed constant throughout the motion

The vector quantity $\mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ is defined as the angular momentum, or moment of momentum, of the particle about the origin O The total angular momentum is given by

$$\mathbf{H} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{r}_j \times m_j \mathbf{v}_j \tag{336}$$

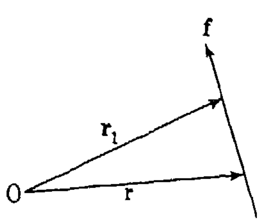

FIG 80

91. Torque, or Force Moment. Let $\mathbf{f}$ be a force acting in a given direction and let $\mathbf{r}$ be any vector from the origin whose end point lies on the line of action of the force (see Fig 80) The vector quantity $\mathbf{r} \times \mathbf{f}$ is defined as the force moment, or torque, of $\mathbf{f}$ about O For a system of forces,

$$\mathbf{L} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_j \tag{337}$$

We immediately ask if the torque is different if we use a different vector $\mathbf{r}_1$ to the line of action of $\mathbf{f}$. The answer is in the negative, for

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \times \mathbf{f} = 0$$

since $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}$ is parallel to $\mathbf{f}$. Hence $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{f} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}$.

What of the torque due to two equal and opposite forces both acting along the same line? It is zero, for

$$\mathbf{r}_1 \times \mathbf{f} + \mathbf{r}_1 \times (-\mathbf{f}) = \mathbf{r}_1 \times (\mathbf{f} - \mathbf{f}) \equiv 0$$

Two equal and opposite forces with different lines of action constitute a **couple** (see Fig 81) Let $\mathbf{r}_1$ be a vector to $\mathbf{f}$ and $\mathbf{r}_2$ a vector to $-\mathbf{f}$. The torque due to this couple is

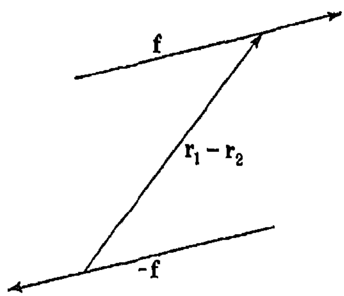

FIG 81

$$\begin{aligned} L &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{f} + \mathbf{r}_2 \times (-\mathbf{f}) \\ &= (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{f} \end{aligned}$$

The couple depends only on $\mathbf{f}$ and on any vector from the line of action of $-\mathbf{f}$ to the line of action of $\mathbf{f}$.

Problems

1 Show that if the resultant of a system of forces is zero, the total torque about one point is the same as that about any other point

2 Show that the torques about two different points are equal, provided that the resultant of the forces is parallel to the vector joining the two origins

3 Show that any set of forces acting on a body can be replaced by a single force, acting at an arbitrary point, plus a suitable couple Prove this first for a single force

4 Prove that the torque due to internal forces vanishes

92. A Theorem Relating Angular Momentum with Torque. We are now in a position to prove that the time rate of change of angular momentum is equal to the sum of the external torques for a system of particles

Since

$$\mathbf{H} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{r}_j \times m_j \mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{r}_j \times m_j \frac{d\mathbf{r}_j}{dt}$$

we have on differentiating

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{r}_j \times m_j \frac{d^2\mathbf{r}_j}{dt^2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{d\mathbf{r}_j}{dt} \times m_j \frac{d\mathbf{r}_j}{dt}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{r}_j \times (\mathbf{f}_j^{(e)} + \mathbf{f}_j^{(i)})$$

$$\boxed{\frac{d\mathbf{H}}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_j^{(e)} = \mathbf{L}} \tag{338}$$

93 Moment of Momentum (*Continued*) It is occasionally more useful to choose a moving point Q as the origin of our

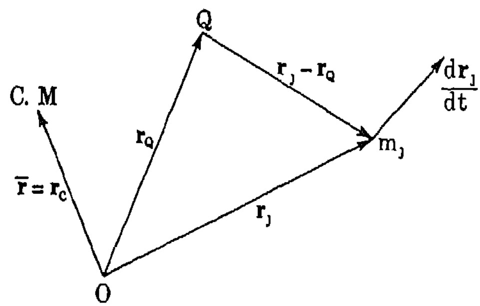

FIG 82

coordinate system Let O be a fixed point and Q any point in space We define

$$\mathbf{H}_Q{}^a \equiv \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_Q) \times m_j \frac{d\mathbf{r}_j}{dt} \tag{339}$$

The superscript a stands for absolute momentum, that is, the velocity of m_j is taken relative to O, whereas the subscript Q stands for the fact that the lever arm is measured from Q to the particle m_j (Fig 82) Differentiating (339), we obtain

$$\frac{d\mathbf{H}_Q{}^a}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{d\mathbf{r}_j}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_Q}{dt}\right) \times m_j \frac{d\mathbf{r}_j}{dt} + \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_Q) \times m_j \frac{d^2\mathbf{r}_j}{dt^2}$$

$$= -\frac{d\mathbf{r}_Q}{dt} \times \sum_{j=1}^{n} m_j \frac{d\mathbf{r}_j}{dt} + \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_Q) \times (\mathbf{f}_j{}^{(e)} + \mathbf{f}_j{}^{(i)})$$

Now $M\bar{\mathbf{r}} = \sum_{j=1}^{n} m_j\mathbf{r}_j$, so that $M\frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt} = \sum_{j=1}^{n} m_j \frac{d\mathbf{r}_j}{dt}$, and $\sum_{j=1}^{n} \mathbf{f}_j{}^{(i)} = 0$, $\sum_{j=1}^{n} \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_j{}^{(i)} = 0$ from Sec 91, so that

$$\frac{d\mathbf{H}_Q{}^a}{dt} = -M\frac{d\mathbf{r}_Q}{dt} \times \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt} + \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{f}_j{}^{(e)}$$

or

$$\boxed{\frac{d\mathbf{H}_Q{}^a}{dt} = \mathbf{L}_Q{}^{(e)} - M\frac{d\mathbf{r}_Q}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}_c}{dt}} \tag{340}$$

We can simplify (340) under three conditions

1 Q at rest, so that $\frac{d\mathbf{r}_Q}{dt} = 0$

2 Center of mass at rest, $\frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = 0$

3 Velocity of Q is parallel to velocity of center of mass, $\frac{d\mathbf{r}_Q}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = 0$

In all three cases

$$\boxed{\frac{d\mathbf{H}_Q{}^a}{dt} = \mathbf{L}_Q{}^{(e)}} \tag{341}$$

In particular, if $\mathbf{L}_Q{}^{(e)} = 0$, then $\mathbf{H}_Q{}^a = constant$, and this is the law of conservation of angular momentum

94. Moment of Relative Momentum about Q. In Sec 93 we assumed that the absolute velocity of each particle was known It is often more convenient to calculate the velocity of each particle relative to Q This is $\frac{d\mathbf{r}_j}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_Q}{dt}$. We now define rela-

tive moment of momentum about Q as

$$\mathbf{H}_Q^r = \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_Q) \times m_j \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_Q) \tag{342}$$

Differentiating,

$$\frac{d\mathbf{H}_Q^r}{dt} = \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_Q) \times m_j \left(\frac{d^2\mathbf{r}_j}{dt^2} - \frac{d^2\mathbf{r}_Q}{dt^2}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_Q) \times (\mathbf{f}_j^{(e)} + \mathbf{f}_j^{(i)}) + \frac{d^2\mathbf{r}_Q}{dt^2} \times \sum_{j=1}^{n} m_j(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_Q)$$

We see that

$$\frac{d\mathbf{H}_Q^r}{dt} = \mathbf{L}_Q^{(e)} + \frac{d^2\mathbf{r}_Q}{dt^2} \times \sum_{j=1}^{n} m_j(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_Q) \tag{343}$$

Under what conditions does $\dfrac{d\mathbf{H}_Q^r}{dt} = \mathbf{L}_Q^{(e)}$? We need

$$\frac{d^2\mathbf{r}_Q}{dt^2} \times \sum_{j=1}^{n} m_j(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_Q) = 0$$

or

$$M \frac{d^2\mathbf{r}_Q}{dt^2} \times (\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_Q) = 0 \tag{344}$$

Now (344) holds if

1 $\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_Q$, or Q is at the center of mass

2 Q moves with constant velocity, $\dfrac{d^2\mathbf{r}_Q}{dt^2} = 0$.

3 $\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_Q$ is parallel to $\dfrac{d^2\mathbf{r}_Q}{dt^2}$.

Problems

1 Show that $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} m_j(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_Q) \times \frac{d^2\mathbf{r}_Q}{dt^2} = M(\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_Q) \times \frac{d^2\mathbf{r}_Q}{dt^2}$.

2 A system of particles lies in a plane, and each particle remains at a fixed distance from a point O in this plane, each

particle rotating about O with angular velocity ω. Show that $\mathbf{H}_O = I\omega$, where $I = \sum_{j=1}^{n} m_j r_j^2$, and show that $\mathbf{L}_O = I \dfrac{d\omega}{dt}$

3 A hoop rolls down an inclined plane What point can be taken as Q so that the equation of motion (343) would be simplified?

95. Kinetic Energy. We define the kinetic energy of a particle of mass m and velocity $\mathbf{v}$ as $T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$. For a system of particles,

$$T = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m_j \mathbf{v}_j^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m_j \left(\frac{d\mathbf{r}_j}{dt}\right)^2 \qquad (345)$$

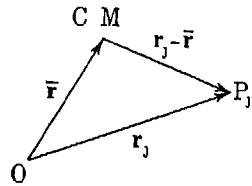

FIG. 83

Now let $\mathbf{r}_c$ be the vector to the center of mass C (Fig 83) It is obvious that

$$\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_c + (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_c)$$

so that

$$\frac{d\mathbf{r}_j}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_c}{dt} + \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_c)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_j}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{r}_j}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{r}_c}{dt}\right)^2 + 2\frac{d\mathbf{r}_c}{dt}\cdot\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_c) + \left[\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_c)\right]^2$$

Hence

$$T = \frac{1}{2}M\left(\frac{d\mathbf{r}_c}{dt}\right)^2 + \frac{d\mathbf{r}_c}{dt}\cdot\sum_{j=1}^{n} m_j \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_c) + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}m_j\left[\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_c)\right]^2 \qquad (346)$$

Now $M\mathbf{r}_c = \sum_{j=1}^{n} m_j\mathbf{r}_j = \left(\sum_{j=1}^{n} m_j\right)\mathbf{r}_c$, so that $\sum_{j=1}^{n} m_j \dfrac{d}{dt}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_c) = 0$,

and (346) reduces to

$$T = \frac{1}{2}M\left(\frac{d\mathbf{r}_c}{dt}\right)^2 + \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}m_j\left[\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_c)\right]^2 \qquad (347)$$

This proves that the kinetic energy of a system of particles is equal to the kinetic energy of a particle having the total mass

of the system and moving with the center of mass, plus the kinetic energy of the particles in their motion relative to the center of mass

96. Work. If a particle moves along a curve Γ with velocity $\mathbf{v}$ under the action of a force $\mathbf{f}$, we define the work done by this force as

$$W = \int_\Gamma (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v})\, dt = \int_\Gamma \mathbf{f} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt = \int_\Gamma \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_\Gamma \mathbf{f} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}\, ds = \int_\Gamma \mathbf{f} \cdot \mathbf{t}\, ds \tag{348}$$

If $\mathbf{f}$ acts at right angles to the path, no work is done.

If the field is conservative, $\mathbf{f} = -\nabla\varphi$, the work done in taking the particle from a point A to a point B is independent of the path (see Sec 52)

Now

$$m_j \frac{d\mathbf{v}_j}{dt} = \mathbf{f}_j^{(e)} + \mathbf{f}_j^{(i)}$$

$$m_j\mathbf{v}_j \cdot \frac{d\mathbf{v}_j}{dt} = \mathbf{f}_j^{(e)} \cdot \mathbf{v}_j + \mathbf{f}_j^{(i)} \cdot \mathbf{v}_j$$

and integrating and summing over all particles,

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{t_1} m_j\mathbf{v}_j \cdot \frac{d\mathbf{v}_j}{dt}\, dt = \sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{f}_j^{(e)} \cdot \mathbf{v}_j\, dt + \sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{f}_j^{(i)} \cdot \mathbf{v}_j\, dt$$

or

$$\sum_{j=1}^{n} \tfrac{1}{2} m_j[\mathbf{v}_j^2(t_1) - \mathbf{v}_j^2(t_0)] = W^{(e)} + W^{(i)} \tag{349}$$

This is the principle of work and energy The change in the kinetic energy of a system of particles is equal to the total work done by both the external and internal forces

If the particles always remain at a constant distance apart, $(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k)^2 \equiv$ constant, the internal forces do no work Let $\mathbf{r}_1$ and $\mathbf{r}_2$ be the position vectors of two particles whose distance apart remains constant, and let $\mathbf{f}$ and $-\mathbf{f}$ be the internal forces of one particle on the other and conversely Now

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \equiv \text{constant}$$

so that

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_2}{dt}\right) = 0 \tag{350}$$

Also

$$\begin{aligned} W^{(i)} &= \int \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_1 \, dt + \int -\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_2 \, dt \\ &= \int \mathbf{f} \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \, dt \end{aligned}$$

Since $\mathbf{f}$ is parallel to $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, we have $\mathbf{f} = \alpha(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ and

$$\mathbf{f} \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \alpha(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \equiv 0$$

from (350) Thus $W^{(i)} = 0$

Problems

1. A system of particles has an angular velocity $\boldsymbol{\omega}$. Show that $T = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m_j |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_j|^2$.

2. If $\boldsymbol{\omega}$ of Prob 1 has a constant direction, show that $T = \frac{1}{2} I \omega^2$, where $I = \sum_{j=1}^{n} m_j d_j^2$, d_j being the shortest distance from m_j to line of $\boldsymbol{\omega}$.

3 Show that $\dfrac{dT}{dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L}$, by using the fact that $T = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} m_j v_j^2$ and that $\mathbf{v}_j = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_j$.

4 Show that the kinetic energy of a system of rotating particles is constant if the system is subjected to no torques What if $\mathbf{L}$ is perpendicular to $\boldsymbol{\omega}$?

5. A particle falls from infinity to the earth Show that it strikes the earth with a speed of approximately 7.0 miles per second Use the principle of work and energy

97. Rigid Bodies. By a rigid body we mean a system of particles such that the relative distances between pairs of points remain constant during the discussion of our problem Actually no such systems exist, but for practical purposes there do exist such rigid bodies, at least to a first approximation Moreover, the rigid body may not consist of a finite number of particles, but rather will have a continuous distribution, at least to the unaided eye. We postulate that we can subdivide the body into a great many small parts so that we can apply our laws of motion for particles to this system, this postulate implying that we can use

the integral calculus Our laws of motion as derived above take the following form

$$
\begin{aligned}
T &= \iiint\limits_R \tfrac{1}{2}\rho v^2\, d\tau, \qquad \rho = \text{density} \\
\mathbf{r}_c &= \frac{\iiint\limits_R \rho \mathbf{r}\, d\tau}{\iiint\limits_R \rho\, d\tau} \\
\iiint\limits_R \mathbf{f}^{(e)}\, d\tau &= M\frac{d^2\mathbf{r}_c}{dt^2} \\
\mathbf{H} &= \iiint\limits_R \rho\mathbf{r}\times\mathbf{v}\, d\tau \\
\frac{d\mathbf{H}}{dt} &= \mathbf{L}^{(e)} = \iiint\limits_R \mathbf{r}\times\mathbf{f}^{(e)}\, d\tau
\end{aligned}
\tag{351}
$$

where $\mathbf{f}^{(e)}$ is the external force per unit volume

98. Kinematics of a Rigid Body. Let O be a point of a rigid body for which O happens to be fixed It is easy to prove that the velocity of any other point P of the body must be perpendicular to the line joining O to P, for if $\mathbf{r}$ is the position vector from O to P, we have $\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} \equiv$ constant throughout the motion so that $\mathbf{r}\cdot\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$ Q E D

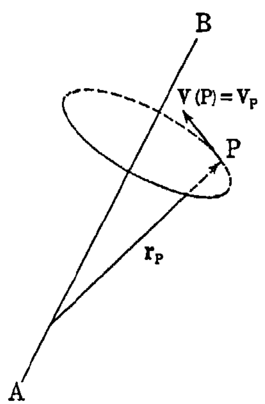

FIG 84

We next prove that if two points of a rigid body are fixed, then all other particles of the body are rotating around the line joining these two points Let A and B be the fixed points and P any other point of the body From above we have

$$\mathbf{v}(P)\cdot\overrightarrow{AP} = \mathbf{v}(P)\cdot\overrightarrow{BP} = 0$$

so that P is always moving perpendicular to the plane ABP Moreover, since the body is rigid, the shortest distance from P to the line AB remains constant, so that P moves in a circle

around AB (Fig 84) We saw in Sec 10 that the velocity of P could be written

$$\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P$$

Is $\boldsymbol{\omega}$ the same for all particles? Yes! Assume Q is rotating about AB with angular velocity $\boldsymbol{\omega}_1$, so that $\mathbf{v}_Q = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_Q$. Now $(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q)^2 \equiv$ constant, so that

$$(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q) \cdot (\mathbf{v}_P - \mathbf{v}_Q) = 0$$

or

$$(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P - \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_Q) = 0$$

Thus

$$-\mathbf{r}_Q \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_P \cdot \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_Q = 0$$

and

$$\mathbf{r}_Q \times \mathbf{r}_P \cdot (\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}) = 0$$

We leave it to the reader to conclude that $\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega}$

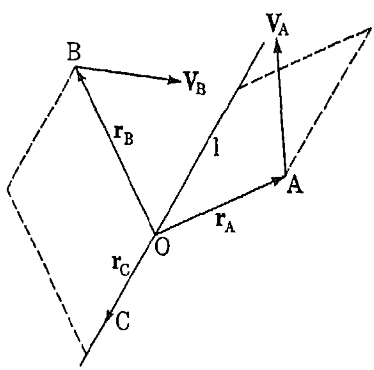

FIG 85

If one point of a rigid body is fixed, we cannot, in general, hope to find a fixed line about which the body is rotating However, there does exist a moving line passing through the fixed point so that at any instant the body is actually rotating around this line The proof proceeds as follows Let O be the fixed point of our rigid body and let $\mathbf{r}_A$ be the position vector to a point A From above we know that the velocity of A, $\mathbf{v}_A$, is perpendicular to $\mathbf{r}_A$. Construct the plane through O and A perpendicular to $\mathbf{v}_A$ (Fig 85) Now choose a point B not in the plane We also have that $\mathbf{v}_B \cdot \mathbf{r}_B = 0$, so that we can construct the plane through O and B perpendicular to $\mathbf{v}_B$. Both planes pass through O, so

that their line of intersection, l, passes through O Now consider any point C on this line We have $\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{r}_C = 0$ Moreover, $(\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A) \cdot (\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A) \equiv$ constant, so that

$$(\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A) \cdot (\mathbf{v}_C - \mathbf{v}_A) = 0$$

and $(\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A) \cdot \mathbf{v}_C = 0$, since $\mathbf{v}_A$ is perpendicular to $(\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A)$. Similarly $(\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_B) \cdot \mathbf{v}_C = 0$ Hence the projections of $\mathbf{v}_C$ in three directions which are nonplanar are zero This means that

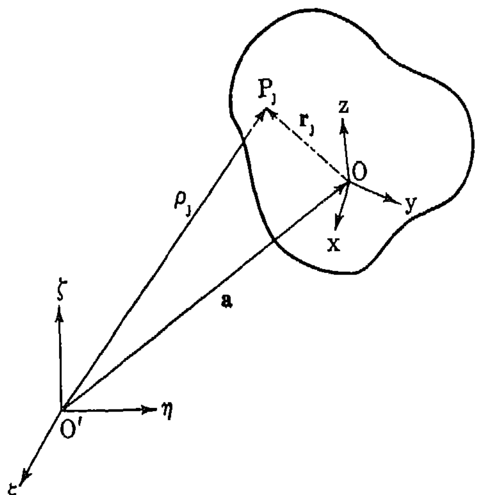

FIG 86

$\mathbf{v}_C \equiv 0$, so that we have two fixed points at this particular instant Hence from the previous paragraph the motion is that of a rotation about the line l. If $\boldsymbol{\omega}$ is the angular-velocity vector, then $\mathbf{v}_j = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_j$, where $\mathbf{r}_j$ is the vector from O to the jth particle

Now let us consider the most general type of motion of a rigid body Let O'-ξ-η-ζ represent a fixed coordinate system in space, and let O-x-y-z represent a coordinate system fixed in the rigid body (see Fig 86) Let $\boldsymbol{\rho}_j$ and $\mathbf{r}_j$ represent the vectors from O' and O to the jth particle, and let $\mathbf{a}$ be the vector from O' to O. We have $\boldsymbol{\rho}_j = \mathbf{a} + \mathbf{r}_j$, and differentiating,

$$\frac{d\boldsymbol{\rho}_j}{dt} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_j}{dt}$$

Now $\frac{d\mathbf{r}_j}{dt}$ represents the velocity of P_j relative to O This means O is fixed as far as P_j is concerned, and from above we know that $\frac{d\mathbf{r}_j}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_j$. Thus

$$\mathbf{v}_j = \frac{d\boldsymbol{\rho}_j}{dt} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_j \tag{352}$$

that is, the most general type of motion of a rigid body is that of a translation $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$ plus a rotation $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_j$.

We next ask the following question If we change our origin from O to, say, O'' does $\boldsymbol{\omega}$ change? (Fig 87) The answer is "No"! Let $\mathbf{b}$ be the vector from O' to O'' Then

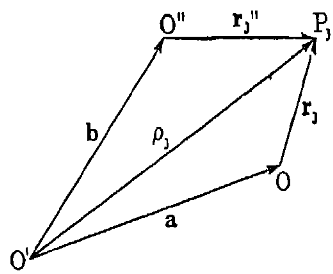

FIG. 87

$$\mathbf{v}_j = \frac{d\boldsymbol{\rho}_j}{dt} = \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_j''$$

But

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

and

$$\mathbf{r}_j'' = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \mathbf{r}_j$$

Thus

$$\mathbf{v}_j = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_j \tag{353}$$

Subtracting (352) from (353), we obtain

$$(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_1) \times (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + (\boldsymbol{\omega}_1 - \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{r}_j = 0$$

or

$$(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_1) \times (\mathbf{b} - \mathbf{a} - \mathbf{r}_j) = -(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_1) \times \mathbf{r}_j'' = 0$$

We can certainly choose an $\mathbf{r}_j'' \neq 0$ and not parallel to the vector $\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_1$, at any particular instant Hence $\boldsymbol{\omega}_1 \equiv \boldsymbol{\omega}$.

Problems

1 Show that if $\mathbf{r}_1$ and $\mathbf{r}_2$ are two position vectors from the origin of the moving system of coordinates to two points in the rigid body, then $\mathbf{r}_1 \cdot \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \mathbf{r}_2 \cdot \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = 0$

2 A plane body is moving in its own plane Find the point in the body which is instantaneously at rest

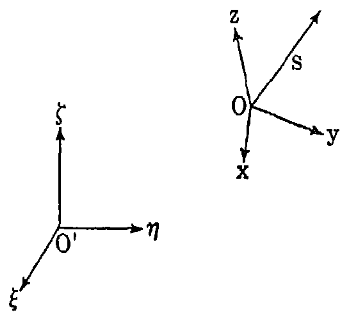

FIG 88

3 Show that the most general motion of a rigid body is a translation plus a rotation about a line parallel to the translation

99. Relative Time Rate of Change of Vectors Let S be any vector measured in the moving system of coordinates (Fig 88)

$$\mathbf{S} = S_x\mathbf{i} + S_y\mathbf{j} + S_z\mathbf{k} \tag{354}$$

To find out how S changes with time as measured by an observer at O', we differentiate (354),

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{dS_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dS_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dS_z}{dt}\mathbf{k} + S_x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + S_y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + S_z\frac{d\mathbf{k}}{dt} \tag{355}$$

We do not keep i, j, k fixed since i, j, k suffer motions relative to O' But we do know that $\frac{d\mathbf{i}}{dt}$ is the velocity of a point one unit along the x axis, relative to O Hence $\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}$, $\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}$, $\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}$. Hence (355) becomes

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{dS_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dS_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dS_z}{dt}\mathbf{k} + \boldsymbol{\omega} \times (S_x\mathbf{i} + S_y\mathbf{j} + S_z\mathbf{k})$$

and

$$\boxed{\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{D\mathbf{S}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}} \tag{356}$$

where $\frac{D\mathbf{S}}{dt}$ represents the time rate of change of S relative to the moving frame, for S_x is measured in the moving frame and so $\frac{dS_x}{dt}$ is the time rate of change of S_x as measured by an observer in the moving frame

Intuitively, we expected the result of (356), for not only does S change relative to O, but to this change we must add the change in S because of the rotating frame. The reader might well ask, What of the motion of O itself? Will not this motion have to be considered? The answer is "No," for a translation of O only pulls S along, that is, S does not change length or direction if O is translated. It is the motion of S relative to the frame O-x-y-z and the rotation about O that produce changes in S.

Problems

1 Show that $\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \dfrac{D\boldsymbol{\omega}}{dt}$.

2 For a pure translation show that $\dfrac{d\mathbf{S}}{dt} = \dfrac{D\mathbf{S}}{dt}$.

3 From (356) show that $\dfrac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}$.

100. Velocity. Let P be any point in space and let $\boldsymbol{\rho}$ and $\mathbf{r}$ be the position vectors to P from O' and O, respectively (see Fig 89). Obviously $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{a} + \mathbf{r}$, so that

$$\mathbf{v} = \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

Now $\mathbf{r}$ is a vector measured in the O-x-y-z system, so that (356) applies to $\mathbf{r}$. This yields $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \dfrac{D\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ and

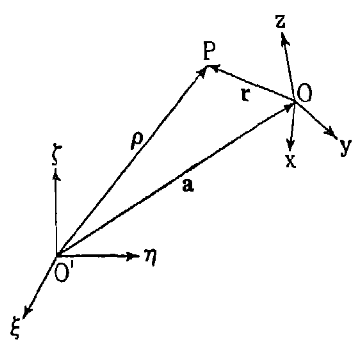

FIG 89.

$$\mathbf{v} = \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \frac{D\mathbf{r}}{dt} \tag{357}$$

This result is expected. $\dfrac{d\mathbf{a}}{dt}$ is the drag velocity of P, $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ is the velocity due to the rotation of the O-x-y-z frame, and $\dfrac{D\mathbf{r}}{dt}$ is the velocity of P relative to the O-x-y-z frame. The vector sum is the velocity of P relative to the frame O'-ξ-η-ζ.

101. Acceleration. In Sec 100 we saw that

$$\mathbf{v} = \frac{d\boldsymbol{\rho}}{dt} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \frac{D\mathbf{r}}{dt}$$

To find the acceleration, we differentiate (357) and obtain

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2} + \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \frac{d}{dt}\left(\frac{D\mathbf{r}}{dt}\right) \tag{358}$$

We apply (356) to $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ and obtain

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \frac{D}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

Similarly

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{D\mathbf{r}}{dt}\right) = \boldsymbol{\omega} \times \frac{D\mathbf{r}}{dt} + \frac{D}{dt}\left(\frac{D\mathbf{r}}{dt}\right)$$

so that (358) becomes

$$\boxed{\frac{d^2\boldsymbol{\rho}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{D\mathbf{r}}{dt} + \frac{D^2\mathbf{r}}{dt^2}} \tag{359}$$

Let us analyze each term of (359) If P were fixed relative to the moving frame, we would have $\frac{D\mathbf{r}}{dt} = \frac{D^2\mathbf{r}}{dt^2} = 0$ and consequently P would still suffer the acceleration

$$\frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}$$

This vector sum is appropriately called the drag acceleration of the particle Now let us analyze each term of the drag acceleration If the moving frame were not rotating, we would have $\boldsymbol{\omega} = 0$, and the drag acceleration reduces to the single term $\frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2}$. This is the translational acceleration of O relative to O'. Now in Sec 84 we saw that $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ represented the centripetal acceleration due to rotation and $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}$ represented the tangential component of acceleration due to the angular-acceleration vector

$\frac{d\omega}{dt}$. We easily explain the term $\frac{D^2\mathbf{r}}{dt^2}$ as the acceleration of P relative to the O-x-y-z frame What, then, of the term $2\omega \times \frac{D\mathbf{r}}{dt}$? This term is called the Coriolis acceleration, named after its discoverer We do not try to give a geometrical or physical reason for its existence Suffice to say, it occurs in Eq (359) and must be considered when we discuss the motion of bodies moving over the earth's surface Notice that the term disappears for particles at rest relative to the moving frame, for then $\frac{D\mathbf{r}}{dt} = 0$ It also does not exist for nonrotating frames

Now Newton's second law states that force is proportional to the acceleration when the mass of the particle remains constant It is found that the frame of reference for which this law holds best is that of the so-called "fixed stars" We call such a frame of reference an inertial frame Any other coordinate system moving relative to an inertial frame with constant velocity is also an inertial frame, since from (359) we have $\frac{d^2\boldsymbol{\varrho}}{dt^2} = \frac{D^2\mathbf{r}}{dt^2}$ because $\omega = 0$, $\frac{d\omega}{dt} = 0$, $\frac{d\mathbf{a}}{dt} = constant$, $\frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2} = 0$

Let us now consider the motion of a particle relative to the earth If $\mathbf{f}$ is the vector sum of the external forces (real forces, that is, gravitation, push, pull, etc), then $\frac{d^2\boldsymbol{\varrho}}{dt^2} = \frac{\mathbf{f}}{m}$, and (359) becomes

$$\frac{D^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2} - \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) - \frac{d\omega}{dt} \times \mathbf{r} - 2\omega \times \frac{D\mathbf{r}}{dt} + \frac{\mathbf{f}}{m} \qquad (360)$$

This is the differential equation of motion for a particle of mass m with external force $\mathbf{f}$ applied to it

Example 108 Let us consider the earth as our rotating frame The quantity $\omega \times (\omega \times \mathbf{r})$ is small, since $|\omega| \approx 2\pi/86{,}164$ rad/sec, and for a particle near the earth's surface, $|\mathbf{r}| \approx (4{,}000)(5{,}280)$ feet Also $\frac{d\omega}{dt} \approx 0$ over a short time, $\frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2} \approx 0$ over a short time,

so that (360) becomes

$$\frac{D^2\mathbf{r}}{dt^2} = -2\boldsymbol{\omega} \times \frac{D\mathbf{r}}{dt} + \frac{\mathbf{f}}{m} \tag{361}$$

Now consider a freely falling body starting from a point P at rest relative to the earth Let the z axis be taken as the line joining the center of the earth to P, and let the x axis be taken perpendicular to the z axis in the eastward direction We shall denote the latitude of the place by λ, assuming $\lambda > 0$ The equation of motion in the eastward direction is given by

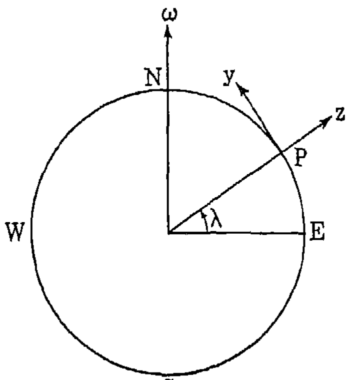

FIG 90

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\left(\boldsymbol{\omega} \times \frac{D\mathbf{r}}{dt}\right)_e + \left(\frac{\mathbf{f}}{m}\right)_e$$

Now $\mathbf{f}$ (force of attraction) has no component eastward, so that $\left(\frac{\mathbf{f}}{m}\right)_e = 0$ We do not know $\frac{D\mathbf{r}}{dt}$, but to a first approximation it is $-gt\mathbf{k} + \frac{dx}{dt}\mathbf{i}$. Moreover, $\boldsymbol{\omega} = \omega \sin\lambda\,\mathbf{k} + \omega\cos\lambda\,\mathbf{j}$ (see Fig 90) Hence $\left(\boldsymbol{\omega} \times \frac{D\mathbf{r}}{dt}\right)_e = -\omega gt\cos\lambda$, and

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega gt\cos\lambda \tag{362}$$

If the particle remains in the vicinity of latitude λ, we can keep λ constant, so that on integrating (362), we obtain

$$\frac{dx}{dt} = \omega gt^2\cos\lambda$$

$$x = \frac{\omega gt^3}{3}\cos\lambda \tag{363}$$

(363) is to a first approximation the eastward deflection of a shot if it is dropped in the Northern Hemisphere If h is the

distance the shot falls, then $h = \frac{1}{2}gt^2$ approximately, so that

$$x = \frac{2}{3}\omega h \cos\lambda \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Problems

1. Show that the winds in the Northern Hemisphere have a horizontal deflecting Coriolis acceleration $2\omega v \sin\lambda$ at right angles to **v**.

2. A body is thrown vertically upward Show that it strikes the ground $\frac{8}{3}\omega h \cos\lambda\,(2h/g)^{\frac{1}{2}}$ to the west

3 Choose the x axis east, y axis south, z axis along the plumb line, and show that the equations of motion for a freely falling body are

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\omega \sin\theta \frac{dz}{dt} - 2\omega\cos\theta\frac{dy}{dt} = 0$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\omega\cos\theta\frac{dy}{dt} = 0$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} - g - 2\omega\sin\theta\frac{dx}{dt} = 0$$

where θ is the colatitude

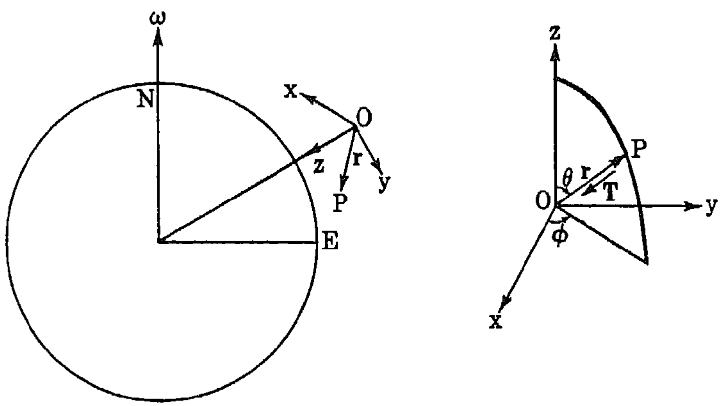

FIG 91

4. Using the coordinate system of Prob 3, let us consider the motion of the Foucault pendulum (see Fig 91)

Let $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ be the unit tangent vectors to the spherical curves r, θ, φ. We leave it to the reader to show that the acceleration

along the $\mathbf{i}_3$ vector is $2\cos\theta\,\varphi\dot{\theta} + \sin\theta\,\varphi$ when the string is of unit length. The two external forces are $mg\mathbf{k}$ along the z axis and the tension in the string, $\mathbf{T} = -T\mathbf{r} = -T\mathbf{i}_1$. We wish to find the component of these forces along the $\mathbf{i}_3$ direction. $\mathbf{T}$ has no component in the $\mathbf{i}_3$ direction. Now $\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}_3 = 0$, so that $mg\mathbf{k}$ has no component along the $\mathbf{i}_3$ direction. Finally, we must compute the $\mathbf{i}_3$ component of $-2\boldsymbol{\omega}\times\dfrac{D\mathbf{r}}{dt}$. The velocity vector is

$$\frac{D\mathbf{r}}{dt} = \theta\mathbf{i}_2 + \sin\theta\,\varphi\mathbf{i}_3$$

Also $\boldsymbol{\omega} = \omega(-\cos\lambda\,\mathbf{j} - \sin\lambda\,\mathbf{k})$, so that we must find the relationship between $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ and $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

Now

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} = \mathbf{i}_1 &= \sin\theta\cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\mathbf{j} + \cos\theta\,\mathbf{k}\\
\mathbf{i}_2 = \frac{\partial\mathbf{i}_1}{\partial\theta} &= \cos\theta\cos\varphi\,\mathbf{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\mathbf{j} - \sin\theta\,\mathbf{k}\\
\mathbf{i}_3 = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\mathbf{i}_1}{\partial\varphi} &= -\sin\varphi\,\mathbf{i} + \cos\varphi\,\mathbf{j}
\end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned}
\mathbf{i} &= (\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}_1)\mathbf{i}_1 + (\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}_2)\mathbf{i}_2 + (\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}_3)\mathbf{i}_3\\
&= \sin\theta\cos\varphi\,\mathbf{i}_1 + \cos\theta\cos\varphi\,\mathbf{i}_2 - \sin\varphi\,\mathbf{i}_3\\
\mathbf{j} &= \sin\theta\sin\varphi\,\mathbf{i}_1 + \cos\theta\sin\varphi\,\mathbf{i}_2 + \cos\varphi\,\mathbf{i}_3\\
\mathbf{k} &= \cos\theta\,\mathbf{i}_1 - \sin\theta\,\mathbf{i}_2
\end{aligned}$$

$$-2\boldsymbol{\omega}\times\frac{D\mathbf{r}}{dt} = 2\omega\begin{vmatrix}
\mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3\\
\cos\lambda\sin\theta\sin\varphi + \sin\lambda\cos\theta & \cos\lambda\cos\theta\sin\varphi - \sin\lambda\sin\theta & \cos\lambda\cos\varphi\\
0 & \dot{\theta} & \sin\theta\,\varphi
\end{vmatrix}$$

and

$$\left(-2\boldsymbol{\omega}\times\frac{D\mathbf{r}}{dt}\right)_{\mathbf{i}_3} = \dot{\theta}(\sin\lambda\sin\theta\sin\varphi + \sin\lambda\cos\theta)$$

Equation (361) yields

$$2\cos\theta\,\varphi\dot{\theta} + \sin\theta\,\varphi = 2\omega(\dot{\theta}\sin\lambda\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\sin\lambda\cos\theta) \tag{364}$$

For small oscillations, $\sin\theta \approx 0$, and (364) reduces to

$$\varphi = \omega \sin \lambda \tag{365}$$

Hence the pendulum rotates about the vertical in the clockwise sense when viewed from the point of suspension with an angular speed $\omega \sin \lambda$ At latitude 30° the time for one complete oscillation is 48 hours

5 Find the equation of motion by considering the $\mathbf{i}_2$ components of (361) for the Foucault pendulum

102 Motion of a Rigid Body with One Point Fixed. The motion of a rigid body with one point fixed will depend on the forces acting on the body Let O-x-y-z be a coordinate system fixed in the moving body, and let O-ξ-η-ζ be the coordinate system fixed in space O is the fixed point of the body In Sec 94 we saw that $\dfrac{d\mathbf{H}_O{}^r}{dt} = \mathbf{L}_O$. Now $\mathbf{H}_O{}^r = \displaystyle\iiint_R \mathbf{r} \times \rho \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, d\tau$. We can replace $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ by $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ ($\boldsymbol{\omega}$ unknown). Thus

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_O{}^r &= \iiint_R \rho\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\, d\tau \\ &= \iiint_R \rho[r^2\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\omega})\mathbf{r}]\, d\tau \end{aligned} \tag{366}$$

Let

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} &= \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k} \\ \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \end{aligned}$$

so that

$$\begin{aligned} r^2\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\omega})\mathbf{r} &= (x^2+y^2+z^2)(\omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}) \\ &\qquad + (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \\ &= [(y^2+z^2)\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z]\mathbf{i} \\ &\qquad + [-xy\omega_x + (z^2+x^2)\omega_y - yz\omega_z]\mathbf{j} \\ &\qquad + [-xz\omega_x - yz\omega_y + (x^2+y^2)\omega_z]\mathbf{k} \end{aligned}$$

We thus obtain

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_O{}^r &= \mathbf{i}[\omega_x\textstyle\iiint\rho(y^2+z^2)\,d\tau - \omega_y\iiint\rho xy\,d\tau - \omega_z\iiint\rho xz\,d\tau] \\ &\quad + \mathbf{j}[-\omega_x\textstyle\iiint\rho xy\,d\tau + \omega_y\iiint\rho(z^2+x^2)\,d\tau - \omega_z\iiint\rho yz\,d\tau] \\ &\quad + \mathbf{k}[-\omega_x\textstyle\iiint\rho xz\,d\tau - \omega_y\iiint\rho yz\,d\tau + \omega_z\iiint\rho(x^2+y^2)\,d\tau] \end{aligned} \tag{367}$$

The quantities

$$
\begin{aligned}
A &= \iiint \rho(y^2 + z^2)\, d\tau \\
B &= \iiint \rho(z^2 + x^2)\, d\tau \\
C &= \iiint \rho(x^2 + y^2)\, d\tau \\
D &= \iiint \rho yz\, d\tau \\
E &= \iiint \rho zx\, d\tau \\
F &= \iiint \rho xy\, d\tau
\end{aligned}
\tag{368}
$$

are independent of the motion and are constants of the body That they are independent of the motion is seen from the fact that for a particle with coordinates x, y, z, the scalars x, y, z remain invariant because the O-x-y-z frame is fixed in the body The quantities A, B, C are the moments of inertia about the x, y, z axes, and D, E, F are called the products of inertia We assume the student has studied these integrals in the integral calculus

Now from Sec 99 we have $\dfrac{d\mathbf{H}_O{}^r}{dt} = \dfrac{D\mathbf{H}_O{}^r}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_O{}^r$ so that

$$
\mathbf{L}_O = \frac{D\mathbf{H}_O{}^r}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_O{}^r
$$

Hence

$$
\begin{aligned}
L_x\mathbf{i} + L_y\mathbf{j} + L_z\mathbf{k} = {} & \mathbf{i}\left(A\frac{d\omega_x}{dt} - F\frac{d\omega_y}{dt} - E\frac{d\omega_z}{dt}\right) \\
& + \mathbf{j}\left(-F\frac{d\omega_x}{dt} + B\frac{d\omega_y}{dt} - D\frac{d\omega_z}{dt}\right) \\
& + \mathbf{k}\left(-E\frac{d\omega_x}{dt} - D\frac{d\omega_y}{dt} + C\frac{d\omega_z}{dt}\right)
\end{aligned}
$$

$$
+ \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ A\omega_x - F\omega_y - E\omega_z, & -F\omega_x + B\omega_y - D\omega_z, & -E\omega_x - D\omega_y + C\omega_z \end{vmatrix}
\tag{369}
$$

In the special case when the axes are so chosen that the products of inertia vanish (see Sec. 107), we have Euler's celebrated equations of motion

$$
\boxed{\begin{aligned}
L_x &= A\frac{d\omega_x}{dt} + (C - B)\omega_y\omega_z \\
L_y &= B\frac{d\omega_y}{dt} + (A - C)\omega_z\omega_x \\
L_z &= C\frac{d\omega_z}{dt} + (B - A)\omega_x\omega_y
\end{aligned}} \tag{370}
$$

103. Applications. If no torques are applied to the body of Sec 102, Euler's equations reduce to

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} && A\frac{d\omega_x}{dt} + (C - B)\omega_y\omega_z = 0 \\
&\text{(ii)} && B\frac{d\omega_y}{dt} + (A - C)\omega_z\omega_x = 0 \\
&\text{(iii)} && C\frac{d\omega_z}{dt} + (B - A)\omega_x\omega_y = 0
\end{aligned} \tag{371}
$$

Multiplying (i), (ii), (iii) by ω_x, ω_y, ω_z, respectively, and adding, we obtain

$$
A\omega_x\frac{d\omega_x}{dt} + B\omega_y\frac{d\omega_y}{dt} + C\omega_z\frac{d\omega_z}{dt} = 0
$$

Integrating yields

$$
\boxed{A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2 = \text{constant}} \tag{372}
$$

This is one of the integrals of the motion We obtain another integral by multiplying (i), (ii), (iii) by $A\omega_x$, $B\omega_y$, $C\omega_z$, and adding. This yields

$$
A^2\omega_x\frac{d\omega_x}{dt} + B^2\omega_y\frac{d\omega_y}{dt} + C^2\omega_z\frac{d\omega_z}{dt} = 0
$$

so that

$$
\boxed{A^2\omega_x^2 + B^2\omega_y^2 + C^2\omega_z^2 = \text{constant}} \tag{373}
$$

If originally the motion was that of a rotation of angular velocity ω about a principal axis (x axis), then initially

$$
\begin{aligned}
\omega_x(0) &= \omega_0 \\
\omega_y(0) &= 0 \\
\omega_z(0) &= 0
\end{aligned}
\tag{374}
$$

and we notice that (371) and the boundary condition (374) are satisfied by

$$
\begin{aligned}
\omega_x(t) &\equiv \omega_0 \\
\omega_y(t) &\equiv 0 \\
\omega_z(t) &\equiv 0
\end{aligned}
$$

so that the motion continues to be one of constant angular velocity about the x axis Here we have used a theorem on the uniqueness of solutions for a system of differential equations

Now suppose the body to be rotating this way and then slightly disturbed, so that now the body has acquired the very small angular velocities ω_y, ω_z We can neglect $\omega_y\omega_z$ as compared to $\omega_y\omega_0$ and $\omega_z\omega_0$ Euler's equations now become

$$
\begin{aligned}
B\frac{d\omega_y}{dt} + (A - C)\omega_z\omega_0 &= 0 \\
C\frac{d\omega_z}{dt} + (B - A)\omega_y\omega_0 &= 0 \\
\omega_0 &= \text{constant}
\end{aligned}
\tag{375}
$$

Differentiating the first equation of (375) with respect to time and eliminating $\dfrac{d\omega_z}{dt}$, we obtain

$$
B\frac{d^2\omega_y}{dt^2} + \frac{(A - C)(A - B)}{C}\omega_0^2\omega_y = 0 \tag{376}
$$

If A is greater than B and C or smaller than B and C, then $a^2 = \dfrac{(A - C)(A - B)}{C} > 0$, and the solution to (376) is

$$
\omega_y = L\cos(at + \alpha)
$$

Also $\omega_z = \dfrac{aBL\sin(at + \alpha)}{\omega_0(A - C)}$ by replacing ω_y in (375)

Problems

1. Solve the free body with $A = B$ for ω_x, ω_y, ω_z

2 A disk ($B = C$) rotates about its x axis (perpendicular to the plane of the disk) with constant angular speed ω_0 A constant torque $\mathbf{L}_0$ is applied constantly in the y direction Find ω_y and ω_z

3 Show that a necessary and sufficient condition that a rigid body be in static equilibrium is that the sum of the external forces and external torques vanish

4 A sphere rotates about its fixed center If the only forces acting on the sphere are applied at the center, show that the initial motion continues

5 In Prob 2 a constant torque $\mathbf{L}_0$ is also applied in the z direction Find ω_y and ω_z

104. Euler's Angular Coordinates. More complicated problems can be solved by use of Euler's angular coordinates Let $O\text{-}x'\text{-}y'\text{-}z'$ be a cartesian coordinate system fixed in space, and let $O\text{-}x\text{-}y\text{-}z$ be fixed in the moving body (Fig 92)

The $x\text{-}y$ plane will intersect the $x'\text{-}y'$ plane in a line, called the nodal line N Let θ be the angle between the z and z' axes, ψ the angle between the x' and N axes, and φ the angle between the nodal line and the x axis The positive directions of these angles are indicated in the figure

The three angles ψ, θ, φ completely specify the configuration of the body Now $\frac{d\psi}{dt}$ represents the rotation of the $O\text{-}z'\text{-}N\text{-}T'$ frame relative to the $O\text{-}x'\text{-}y'\text{-}z'$ frame, $\frac{d\theta}{dt}$ represents the rotation of the $O\text{-}z\text{-}N\text{-}T$ frame relative to the $O\text{-}z'\text{-}N\text{-}T'$ frame, and finally, $\frac{d\varphi}{dt}$ represents the rotation of the $O\text{-}x\text{-}y\text{-}z$ frame relative to the $O\text{-}z\text{-}N\text{-}T$ frame Therefore $\frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\phi}}{dt}$ gives us the angular velocity of the $O\text{-}x\text{-}y\text{-}z$ frame relative to the fixed $O\text{-}x'\text{-}y'\text{-}z'$ frame, and

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\psi}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\phi}}{dt} \tag{377}$$

The three angular velocities are not mutually perpendicular.

We now define $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$, $\mathbf{k}'$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{T}'$, $\mathbf{T}$ as unit vectors along the x, y, z, x', y', z', N, T', T axes, respectively Thus

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{d\psi}{dt}\mathbf{k}' + \frac{d\theta}{dt}\mathbf{N} + \frac{d\varphi}{dt}\mathbf{k} \\ &= \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k} \\ &= \omega_{x'}\mathbf{i}' + \omega_{y'}\mathbf{j}' + \omega_{z'}\mathbf{k}' \end{aligned} \tag{378}$$

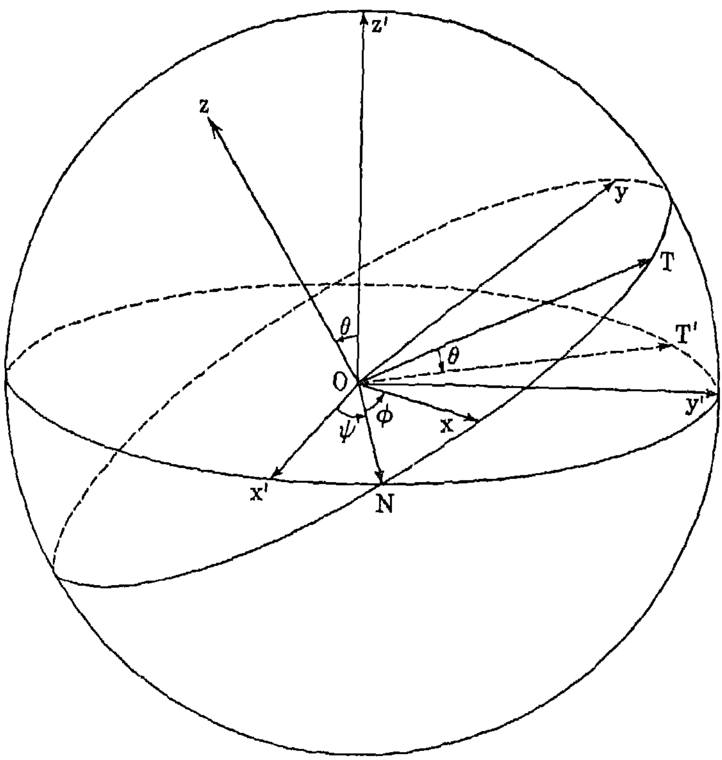

FIG 92

Now it is easy to verify that

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \cos\varphi\,\mathbf{N} + \sin\varphi\,\mathbf{T} \\ \mathbf{j} &= -\sin\varphi\,\mathbf{N} + \cos\varphi\,\mathbf{T} \\ \mathbf{i}' &= \cos\psi\,\mathbf{N} - \sin\psi\,\mathbf{T}' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{j}' &= \sin\psi\,\mathbf{N} + \cos\psi\,\mathbf{T}' \\
\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}' &= \sin\varphi\,\mathbf{T}\cdot\mathbf{k}' = \sin\varphi\sin\theta \\
\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}' &= \cos\varphi\,\mathbf{T}\cdot\mathbf{k}' = \cos\varphi\sin\theta
\end{aligned}$$

so that

$$\begin{aligned}
\omega_x = \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{i} &= \frac{d\psi}{dt}\,\mathbf{k}'\cdot\mathbf{i} + \frac{d\theta}{dt}\,\mathbf{N}\cdot\mathbf{i} + \frac{d\varphi}{dt}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{i} \\
&= \sin\varphi\sin\theta\,\frac{d\psi}{dt} + \cos\varphi\,\frac{d\theta}{dt} \\
\omega_y &= \cos\varphi\sin\theta\,\frac{d\psi}{dt} - \sin\varphi\,\frac{d\theta}{dt} \\
\omega_z &= \cos\theta\,\frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt}
\end{aligned}$$

Rewriting this, we have

$$\begin{aligned}
\omega_x &= \frac{d\psi}{dt}\sin\theta\sin\varphi + \frac{d\theta}{dt}\cos\varphi \\
\omega_y &= \frac{d\psi}{dt}\sin\theta\cos\varphi - \frac{d\theta}{dt}\sin\varphi \\
\omega_z &= \frac{d\psi}{dt}\cos\theta + \frac{d\varphi}{dt}
\end{aligned} \tag{379}$$

Also

$$\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + 2\cos\theta\,\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\psi}{dt} \tag{380}$$

For the fixed frame

$$\begin{aligned}
\omega_{x'} &= \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{i}' = \cos\psi\,\frac{d\theta}{dt} + \sin\psi\sin\theta\,\frac{d\varphi}{dt} \\
\omega_{y'} &= \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{j}' = \sin\psi\,\frac{d\theta}{dt} - \cos\psi\sin\theta\,\frac{d\varphi}{dt} \\
\omega_{z'} &= \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{k}' = \frac{d\psi}{dt} + \cos\theta\,\frac{d\varphi}{dt}
\end{aligned} \tag{381}$$

105. Motion of a Free Top about a Fixed Point. Let us assume that no torques exist and that the top is symmetric ($A = B$). Euler's equations become

$$\text{(i)} \qquad A \frac{d\omega_x}{dt} + (C - A)\omega_y\omega_z = 0$$

$$\text{(ii)} \qquad A \frac{d\omega_y}{dt} + (A - C)\omega_x\omega_z = 0 \qquad (382)$$

$$\text{(iii)} \qquad C \frac{d\omega_z}{dt} = 0$$

Integrating (iii), we obtain $\omega_z = \omega_0 =$ constant Multiply (ii) by $i = \sqrt{-1}$ and add to (i) We obtain

$$A \frac{d}{dt}(\omega_x + i\omega_y) + (C - A)\omega_0(\omega_y - i\omega_x) = 0$$

or

$$A \frac{d}{dt}(\omega_x + i\omega_y) = i\omega_0(C - A)(\omega_x + i\omega_y)$$

Integrating,

$$\omega_x + i\omega_y = \alpha e^{[i(C-A)/A]\omega_0 t}$$

so that

$$\begin{aligned} \omega_x &= \alpha \cos \sigma t \\ \omega_y &= \alpha \sin \sigma t \end{aligned} \qquad (383)$$

where $\sigma = [(C - A)/A]\omega_0$ and α is a constant of integration

Now $\omega^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = \alpha^2 + \omega_0^2 =$ constant, so that the magnitude of the angular velocity remains constant during the motion Moreover, $\dfrac{d\mathbf{H}}{dt} = 0$, so that $\mathbf{H}$ is a constant vector in fixed space We choose the z' axis for the direction of $\mathbf{H}$. Now

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= A\omega_x\mathbf{i} + B\omega_y\mathbf{j} + C\omega_z\mathbf{k} \\ &= A\alpha \cos \sigma t\, \mathbf{i} + A\alpha \sin \sigma t\, \mathbf{j} + C\omega_0\mathbf{k} \end{aligned} \qquad (384)$$

This shows that $\mathbf{H}$ rotates around the z axis (of the body) with constant angular speed $\sigma = [(C - A)/A]\omega_0$, and since $\mathbf{H}$ is fixed in space, it is the z axis of the body which is rotating about the fixed z' axis with constant angular speed $-\sigma = [(A - C)/A]\omega_0$ Also $\mathbf{H} \cdot \mathbf{k} = |H| \cos \theta = C\omega_0$, so that θ is a constant since $|H| =$ constant We say that the top precesses about the z' axis

106. The Top (*Continued*). We have assumed above that the weight of the top or gyroscope was negligible, or that the gyroscope was balanced, that is, suspended with its center of mass at the point of support, so that no torques were produced We

shall now assume that the center of mass, while still located on the axis of symmetry, is not at the point of support We now have the following situation (Fig 93)

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= l\mathbf{k} \times (-W\mathbf{k}') \\ &= Wl \sin \theta \, \mathbf{N} \end{aligned}$$

The three components of the torque are

$$\begin{aligned} L_x &= Wl \sin \theta \cos \varphi \\ L_y &= -Wl \sin \theta \sin \varphi \\ L_z &= 0 \end{aligned}$$

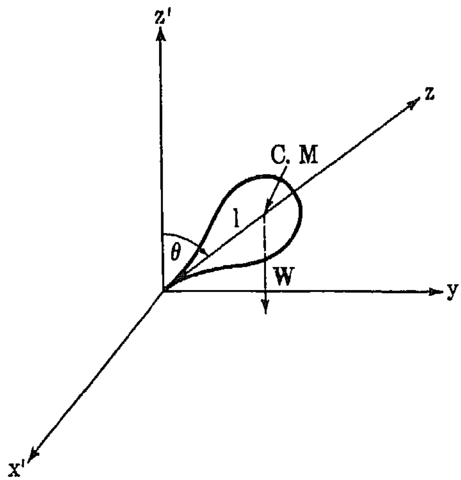

FIG 93

Euler's equations become

$$\begin{aligned} Wl \sin \theta \cos \varphi &= A \frac{d\omega_x}{dt} + (C - A)\omega_y\omega_z \\ -Wl \sin \theta \sin \varphi &= A \frac{d\omega_y}{dt} + (A - C)\omega_z\omega_x \\ 0 &= C \frac{d\omega_z}{dt} \text{ for } A = B \end{aligned} \tag{385}$$

Hence $\omega_z \equiv \omega_0$ Multiplying Eqs (385) by ω_x, ω_y, ω_z, respectively, and adding, we obtain

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2) = Wl \sin \theta(\omega_x \cos \varphi - \omega_y \sin \varphi) \tag{386}$$

From (379) we have $\omega_x \cos \varphi - \omega_y \sin \varphi = \dfrac{d\theta}{dt}$, so that (386) becomes

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2) = Wl \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

and integrating

$$A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2 = -2Wl \cos \theta + k$$

or, again using (379),

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \sin^2 \theta + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \alpha - a \cos \theta \tag{387}$$

α and a are constants

Now since $L_{z'} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{k}' = 0$, we have $H_{z'} =$ constant Also $\mathbf{H} = A\omega_x\mathbf{i} + B\omega_y\mathbf{j} + C\omega_z\mathbf{k}$, so that

$$H_{z'} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{k}' = A\omega_x \sin \theta \sin \varphi + A\omega_y \cos \varphi \sin \theta + C\omega_0 \cos \theta$$
$$= \text{constant}$$

Replacing ω_x and ω_y by their equals from (379), we have

$$A\left(\frac{d\psi}{dt}\sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \frac{d\theta}{dt}\sin \varphi \sin \theta \cos \varphi + \frac{d\psi}{dt}\cos^2 \varphi \sin^2 \theta - \frac{d\theta}{dt}\cos \varphi \sin \varphi \sin \theta\right) + C\omega_0 \cos \theta = \text{constant} \tag{388}$$

or $A \dfrac{d\psi}{dt} \sin^2 \theta + C\omega_0 \cos \theta = \text{constant} = H_{z'}$

Let $\beta = H_{z'}/A$, $b = C\omega_0/A$, so that (388) becomes

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\beta - b \cos \theta}{\sin^2 \theta} \tag{389}$$

From (379)

$$\omega_z = \omega_0 = \frac{d\psi}{dt}\cos \theta + \frac{d\varphi}{dt} \tag{390}$$

Using (389), (387) becomes

$$\left(\frac{\beta - b \cos \theta}{\sin \theta}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \alpha - a \cos \theta \tag{391}$$

Let $z = \cos\theta$, so that $\dfrac{dz}{dt} = -\sin\theta\,\dfrac{d\theta}{dt}$, and

$$(\beta - bz)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = (\alpha - az)(1 - z^2)$$

Hence

$$t = \int_0^z [(\alpha - az)(1 - z^2) - (\beta - bz)^2]^{-\frac{1}{2}}\,dz \tag{392}$$

This integral belongs to the class of elliptic integrals If we can integrate and find z, then we shall know

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\beta - bz}{1 - z^2}, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 - \frac{d\psi}{dt}z$$

The reader should look up a complete discussion of elliptic integrals in the literature

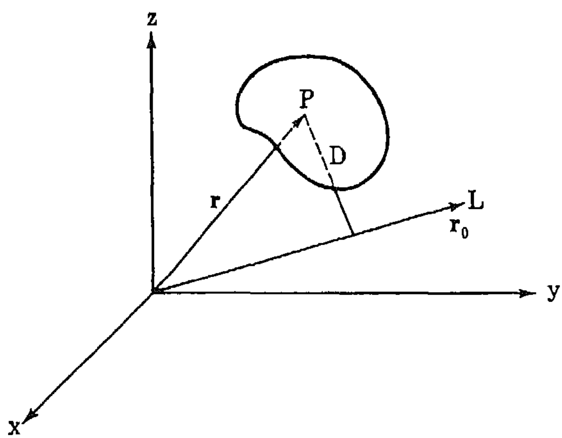

FIG 94

107 Inertia Tensor. The moment of inertia of a rigid body about a line through the origin may be computed as follows Let the line L be given by the unit vector $\mathbf{r}_0 = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$, and let $\mathbf{r}$ be the vector from O to any point P in the body,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

(see Fig 94) The shortest distance from P to L is given by

$$
\begin{aligned}
D^2 &= \mathbf{r}^2 - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_0)^2 \\
&= (x^2+y^2+z^2) - (lx+my+nz)^2 \\
&= (l^2+m^2+n^2)(x^2+y^2+z^2) - (lx+my+nz)^2 \\
&= l^2(y^2+z^2) + m^2(z^2+x^2) + n^2(x^2+y^2) - 2mnyz \\
&\qquad\qquad - 2lnzx - 2lmxy
\end{aligned}
$$

Thus

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint \rho D^2\, dz\, dy\, dx \\
&= Al^2 + Bm^2 + Cn^2 - 2mnD - 2nlE - 2lmF
\end{aligned}
$$

Let us replace l, m, n by the variables x, y, z, and let us consider the surface

$$
\varphi(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy = 1 \tag{393}
$$

A line L through the origin is given by the equation $x = lt$, $y = mt$, $z = nt$ This line intersects the ellipsoid $\varphi(x, y, z) = 1$ for t satisfying

$$
(Al^2 + Bm^2 + Cn^2 - 2Dmn - 2nlE - 2lmF)t^2 = 1
$$

or $t^2 = 1/I$. The distance from the origin to this point of intersection is given by

$$
d = (l^2t^2 + m^2t^2 + n^2t^2)^{\frac{1}{2}} = t = I^{-\frac{1}{2}}
$$

so that

$$
I = \frac{1}{d^2} \tag{394}
$$

We know that a rotation of axes will keep I fixed, for the line and the body will be similarly situated after the rotation We now attempt to simplify the equation of the quadric surface $\varphi(x, y, z) = 1$ First, let us find a point P on this surface at which the normal will be parallel to the radius vector to this point The normal to the surface is given by $\nabla\varphi$, so that we desire $\mathbf{r}$ parallel to $\nabla\varphi$, which yields the equations

$$
\frac{Ax - Ez - Fy}{x} = \frac{By - Dz - Fx}{y} = \frac{Cz - Dy - Ex}{z} \tag{395}
$$

Any orthogonal transformation (Example 8) will preserve the form of (393) and (395) with x, y, z replaced by x', y', z' and A, B, . . . , F replaced by A', B', . . . , F'. Now choose the

z' axis through P so that $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = \zeta$ satisfy (395). This yields $-E'/0 = -D'/0 = C'$, which means that

$$E' = D' = 0,$$

and (393) reduces to

$$A'x'^2 + B'y'^2 + C'z'^2 - 2F'x'y' = 1 \tag{396}$$

The rotation

$$\begin{aligned} x'' &= x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y'' &= x' \sin \theta + y' \cos \theta \\ z'' &= z' \end{aligned}$$

with $\tan 2\theta = F'/(B' - A')$ reduces (396) to

$$\boxed{A''x''^2 + B''y''^2 + C''z''^2 = 1} \tag{397}$$

This is the canonical form desired We have thus proved the important theorem that a quadratic form of the type (393) can always be reduced to a sum of squares of the form (397) by a rotation of axes In the proof we made the assumption that there was a point P such that $\mathbf{r}$ is parallel to $\nabla\varphi$, which yielded (395) We could have arrived at Eqs (395) by asking at what point on the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ is $\varphi(x, y, z)$ a maximum Since $\varphi(x, y, z)$ is continuous on the compact set

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

such a point always exists Equations (395) are then easily deduced by Lagrange's method of multipliers

We can arrange the constants of inertia into a square matrix

$$I = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix} \tag{398}$$

The elements of the matrix (an array of elements) are called the components of I Under a proper rotation we have shown that we can write

$$I = \begin{pmatrix} A'' & 0 & 0 \\ 0 & B'' & 0 \\ 0 & 0 & C'' \end{pmatrix} \tag{399}$$

In general, under an orthogonal transformation, I will become

$$I = \begin{pmatrix} A' & -F' & -E' \\ -F' & B' & -D' \\ -E' & -D' & C' \end{pmatrix} \tag{400}$$

and the components of I in (400) will be related to the components of I in (398) according to a certain law We shall see in Chap 8 that I is a tensor and so is called the inertia tensor.

Referring back to (367), we may write

$$\begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \tag{401}$$

from the definition of multiplication of matrices, where

$$\mathbf{H}_O{}^r = H_x\mathbf{i} + H_y\mathbf{j} + H_z\mathbf{k}$$

$\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$

If we write (398) as $\begin{pmatrix} I_1{}^1 & I_2{}^1 & I_3{}^1 \\ I_1{}^2 & I_2{}^2 & I_3{}^2 \\ I_1{}^3 & I_2{}^3 & I_3{}^3 \end{pmatrix}$ and

$$\mathbf{H}_O{}^r = H_1\mathbf{i} + H_2\mathbf{j} + H_3\mathbf{k}$$

$\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{i} + \omega_2\mathbf{j} + \omega_3\mathbf{k}$, then (367) may be written

$$H_j = \sum_{\alpha=1}^{3} I_j{}^\alpha\omega_\alpha, \qquad j = 1, 2, 3 \tag{402}$$

which is equivalent to the matrix form (401)

Problems

1 Find the moments and products of inertia for a uniform cube, taking the cube edges as axes.

2 Show that the moment of inertia of a body about any line is equal to its moment of inertia about a parallel line through the center of mass, plus the product of the total mass and the square of the distance from the line to the center of mass

3 Find the angular-momentum vector of a thin rectangular sheet rotating about one of its diagonals with constant angular speed ω_0

4 If

$$H_\beta = \sum_{\alpha=1}^{3} I_\beta{}^\alpha \omega_\alpha, \qquad \bar{H}_\beta = \sum_{\alpha=1}^{3} \bar{I}_\beta{}^\alpha \bar{\omega}_\alpha$$

$$\bar{H}_\beta = \sum_{\alpha=1}^{3} a_\beta{}^\alpha H_\alpha, \qquad \bar{\omega}_\beta = \sum_{\alpha=1}^{3} a_\beta{}^\alpha \omega_\alpha, \quad \beta = 1, 2, 3$$

for arbitrary ω_α, show that

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \bar{I}_\beta{}^\alpha a_\alpha{}^\sigma = \sum_{\alpha=1}^{3} I_\alpha{}^\sigma a_\beta{}^\alpha, \qquad \beta, \sigma = 1, 2, 3$$

5. Let us consider the form

$$I = x^2 + 9y^2 + 18z^2 - 2xy - 2xz + 18yz$$

We may write

$$\begin{aligned} I &= (x^2 - 2xy - 2xz) + 9y^2 + 18yz + 18z^2 \\ &\equiv (x - y - z)^2 + 8y^2 + 16yz + 17z^2 \\ &\equiv (x - y - z)^2 + 8(y + z)^2 + 9z^2 \\ &\equiv X^2 + Y^2 + Z^2 \end{aligned}$$

where $X = x - y - z$, $Y = \sqrt{8}\,(y + z)$, $Z = 3z$, a set of linear transformations from x, y, z to X, Y, Z

This method may be employed to reduce any quadratic form to normal form However, the linear transformations may not be a rotation of axes Reduce I to normal form by a rotation of axes

CHAPTER 7

HYDRODYNAMICS AND ELASTICITY

108. Pressure. The science of hydrodynamics deals with the motion of fluids We shall be interested in liquids and gases, a liquid or gas being defined as a collection of molecules, which, when studied macroscopically, appear to be continuous in structure A liquid differs from a solid in that the liquid will yield to any shearing stress, however small, if the stress is continued long enough All liquids are compressible to a slight extent, but for many purposes it is simpler to consider the liquid as being incompressible We shall also be highly interested in perfect fluids These are liquids which possess no shearing stresses

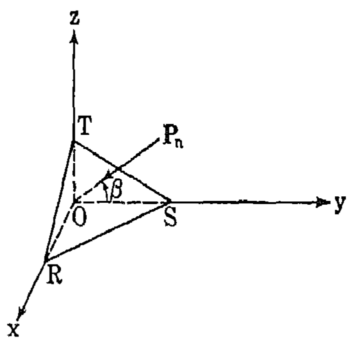

FIG 95

We now show that the pressure is the same in all directions for a perfect fluid Let us consider the motion of the tetrahedron $ORST$ (see Fig 95) The face ORT has a force acting on it, since it is in contact with other parts of the liquid Under the above assumption, this force acts normal to the face Call it Δf_y If we divide Δf_y by the area of the face ORT, ΔA_y, we obtain the pressure on this face, $P_y = \dfrac{\Delta f_y}{\Delta A_y}$ The limit of this quotient is called the pressure in the direction normal to the face ORT The y component of the pressure on the face RST is $P_n \cos \beta$ Let f_y be the y component of the external force per unit volume, and let ρ be the density of the fluid The equation of motion in the y direction is given by

$$P_y \, \Delta A_y - P_n \cos \beta \, \Delta A_n + f_y \, \Delta\tau = \frac{d}{dt}\left(\rho \, \Delta\tau \, \frac{dy}{dt}\right)$$

$$= \rho \, \Delta\tau \, \frac{d^2y}{dt^2} \qquad (403)$$

since $\frac{d}{dt}(\rho\,\Delta\tau) = \frac{dm}{dt} = 0$. Now $\Delta A_y = \Delta A_n \cos\beta$, so that (403) becomes

$$(P_y - P_n) + f_y \frac{\Delta\tau}{\Delta A_y} = \frac{1}{\Delta A_y}\frac{d}{dt}\left(\rho\,\Delta\tau\,\frac{dy}{dt}\right) \tag{404}$$

As $\Delta A_y \to 0$, we have $\frac{\Delta\tau}{\Delta A_y} \to 0$, so that if we assume f_y, $\frac{d^2y}{dt^2}$, ρ finite, we must have $P_y = P_n$ Similarly, $P_y = P_x = P_z = p$ Since the normal $\mathbf{n}$ for the tetrahedron can be chosen arbitrarily, the pressure is the same in all directions and p is a point function, $p = p(x, y, z, t)$ We leave it to the student to prove that at the boundary of two perfect fluids the pressure is continuous

109. The Equation of Continuity. Consider a surface S bounding a simply connected region lying entirely inside the liquid Let ρ be the density of the fluid, so that the total mass of the fluid inside S is given by

$$M = \iiint_R \rho(x, y, z, t)\, d\tau$$

Differentiating with respect to time and remembering that x, y, z are variables of integration, we obtain

$$\frac{dM}{dt} = \iiint_R \frac{\partial\rho}{\partial t}\, d\tau \tag{405}$$

Now there are only three ways in which the mass of the fluid inside S can change (1) fluid may be entering or leaving the surface The contribution due to this effect is $\iint_S \mathbf{v}\rho \cdot d\boldsymbol{\sigma}$. (2) matter may be created (source), or (3) matter may be destroyed (sink) Let $\psi(x, y, z, t)$ be the amount of matter created or destroyed per unit volume For a source, $\psi > 0$, and for a sink, $\psi < 0$. The net gain of fluid is therefore

$$\iiint_R \psi\, d\tau - \iint_S \rho\mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \tag{406}$$

Equating (405) and (406) and applying the divergence theorem, we obtain

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \psi(x, y, z, t)} \tag{407}$$

This is the equation of continuity For no source and sink, (407) reduces to

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0} \tag{408}$$

If furthermore the liquid is incompressible, ρ = constant, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, and (408) becomes

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{v} = 0} \tag{409}$$

If the motion is irrotational, that is, if $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = 0$, then $\mathbf{v} = \nabla \varphi$, so that the equation of continuity for an incompressible fluid possessing no sources and sinks and having irrotational motion is given by

$$\boxed{\nabla^2 \varphi = 0} \tag{410}$$

We call φ the velocity potential We solve Laplace's equation for φ, then compute the velocity from $\mathbf{v} = \nabla \varphi$.

Problems

1 If the velocity of a fluid is radial, $u = u(r, t)$, show that the equation of continuity is

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\rho}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) = \psi(r, t)$$

Solve this equation for an incompressible fluid, if $\psi(r, t) = 1/r^2$

2. Show that $\mathbf{v} = \dfrac{-2xyz}{(x^2 + y^2)^2}\mathbf{i} + \dfrac{(x^2 - y^2)z}{(x^2 + y^2)^2}\mathbf{j} + \dfrac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{k}$ is a possible motion for an incompressible perfect fluid Is this motion irrotational?

3 Prove that, if the normal velocity is zero at every point of the boundary of a liquid occupying a simply connected region, and moving irrotationally, φ is constant throughout the interior of that region

4. Prove that if φ is constant over the boundary of any simply connected region, then φ has the same constant value throughout the interior

5 Express (407) in cylindrical coordinates, spherical coordinates, rectangular coordinates

110. Equations of Motion for a Perfect Fluid. Let us consider the motion of a fluid inside a simply connected region of volume V and boundary S The forces acting on this volume are

(1) external forces (gravity, etc), say, $\mathbf{f}$ per unit mass; (2) pressure thrust on the surface, $-p\, d\boldsymbol{\sigma}$, since $d\boldsymbol{\sigma}$ points outward The total force acting on V is

$$\mathbf{F} = \iiint\limits_V \rho\mathbf{f}\, d\tau - \iint\limits_S p\, d\boldsymbol{\sigma} = \iiint\limits_V (\rho\mathbf{f} - \nabla p)\, d\tau$$

The linear momentum of V is

$$\mathbf{M} = \iiint\limits_V \rho\mathbf{v}\, d\tau$$

and the time rate of change of linear momentum is

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{M}}{dt} &= \frac{d}{dt}\iiint\limits_V \rho\mathbf{v}\, d\tau \\ &= \iiint\limits_V \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}\, d\tau + \iiint\limits_V \mathbf{v}\frac{d}{dt}(\rho\, d\tau) \end{aligned}$$

since the volume V changes with time. However, $\rho\, d\tau$ is the mass of the volume $d\tau$, and this remains constant throughout the motion, so that $\frac{d}{dt}(\rho\, d\tau) = 0$ Since $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{M}}{dt}$, we obtain

$$\iiint\limits_V (\rho\mathbf{f} - \nabla p)\, d\tau = \iiint\limits_V \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}\, d\tau$$

This equation is true for all V, so that

$$\rho\mathbf{f} - \nabla p = \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

or

$$\boxed{\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p} \tag{411}$$

This is Euler's equation of motion

From (76) we have that $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$, so that an alternative form of (411) is

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p \tag{412}$$

Also from Eq (9) of Sec 22, $\nabla \mathbf{v}^2 = 2\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + 2(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$, so that (412) becomes

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \mathbf{v}^2 - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p \tag{413}$$

111. Equations of Motion for an Incompressible Fluid under the Action of a Conservative Field. If the external field is conservative, $\mathbf{f} = -\nabla\chi$, so that $\mathbf{f} - (1/\rho)\nabla p = -\nabla[\chi + (p/\rho)]$ if ρ = constant. Hence (413) becomes

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = -\nabla\left(\chi + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right) \tag{414}$$

We consider two special cases

(*a*) *Irrotational motion* $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ and $\nabla \times \mathbf{v} = 0$, so that (414) becomes $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla\left(\chi + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right)$

(*b*) *Steady motion.* $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$, so that (414) becomes

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla\left(\chi + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right)$$

For this case we immediately have that

$$\mathbf{v} \cdot \left[\nabla\left(\chi + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right)\right] = 0$$

Hence $\nabla[\chi + (p/\rho) + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2]$ is normal everywhere to the velocity field $\mathbf{v}$. Thus $\mathbf{v}$ is parallel to the surface $\chi + (p/\rho) + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2$ = constant The curve drawn in the fluid so that its tangents are parallel to the velocity vectors at corresponding points is called a streamline. We have proved that for an incompressible perfect fluid, which moves under the action of conservative

forces and whose motion is steady, the expression $\chi + (p/\rho) + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2$ remains constant along a streamline. This is the general form of Bernoulli's theorem If χ remains essentially constant, then an increase of velocity demands a decrease of pressure, and conversely

Problems

1 If the motion of a perfect incompressible fluid is both steady and irrotational, show that $\chi + (p/\rho) + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 = \text{constant}$

2 If the fluid is at rest, $\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = 0$ Show that $\nabla \times (\rho\mathbf{f}) = 0$, and hence that $\mathbf{f} \cdot \nabla \times \mathbf{f} = 0$ This is a necessary condition for equilibrium of a fluid Why must $\rho\mathbf{f}$ be the gradient of a scalar if equilibrium is to be possible?

3 If a liquid rotates like a rigid body with constant angular velocity $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$ and if gravity is the only external force, prove that $p/\rho = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 - gz + \text{constant}$, where r is the distance from the z axis

4 Write (411) in rectangular, cylindrical, and spherical coordinates

5 A liquid is in equilibrium under the action of an external force $\mathbf{f} = (y + z)\mathbf{i} + (z + x)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$. Find the surfaces of equal pressure

6 If the motion of the fluid is referred to a moving frame of reference which rotates with angular velocity $\boldsymbol{\omega}$ and has translational velocity $\mathbf{u}$, show that the equation of motion is

$$\mathbf{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{D\mathbf{r}}{dt} + \frac{D^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

and that the equation of continuity is

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \frac{D\mathbf{r}}{dt}\right) = 0$$

7 *The energy equation* For a simply connected region R with boundary S, the kinetic energy of R is

$$T = \tfrac{1}{2} \iiint_R \rho \mathbf{v}^2 \, d\tau$$

Let the surface S move so that it always contains all the original mass of R Show that

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2}\iiint_R \rho \frac{d\mathbf{v}^2}{dt}\,d\tau$$
$$= \iiint_R \mathbf{v}\cdot\left(\mathbf{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p\right)d\tau$$
$$= \iiint_R \mathbf{v}\cdot\mathbf{f}\,d\tau - \iint_S p\mathbf{v}\cdot d\mathbf{d} + \iiint_R p\frac{d}{dt}(d\tau) \qquad (415)$$

Analyze each term of (415)

8 For irrotational flow show that

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\left(\chi + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right) + C(t),$$

and if $\rho = \rho(p)$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} + \dfrac{\mathbf{v}^2}{2} + \chi + \displaystyle\int \frac{dp}{\rho} = D(t)$

112. The General Motion of a Fluid. Let us consider the velocities of the particles occupying an element of volume of a fluid. Let P be a point of the volume or region, and let $\mathbf{v}_P$ represent the velocity of the fluid at P (Fig 96) The velocity at a nearby point Q is

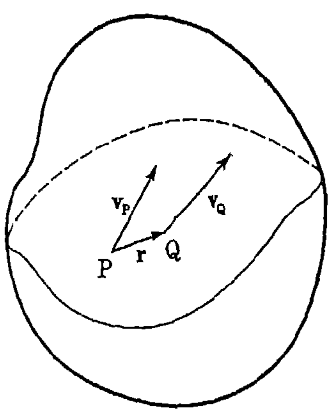

FIG 96

$$\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_P + d\mathbf{v}_P$$
$$= \mathbf{v}_P + (d\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{v}_P \qquad (416)$$

from (75) By $(d\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{v}_P$ we mean that after differentiation, the partial derivatives of $\mathbf{v}$ are calculated at P We now replace $d\mathbf{r}$ by $\mathbf{r}$ for convenience, so that $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ if we consider P as the origin and x, y, z large in comparison with x^2, y^2, z^2, zy, etc. Equation (416) now becomes $\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_P + (\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{v}_P$. Now

$$\nabla(\mathbf{r}\cdot\mathbf{w}) = \mathbf{r}\times(\nabla\times\mathbf{w}) + (\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{w} + \mathbf{w} \qquad (417)$$

from (9), (10), (12) of Sec 22

Now let

$$\mathbf{w} \equiv (\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{v}_P = x\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x}\bigg|_P + y\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y}\bigg|_P + z\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z}\bigg|_P \qquad (418)$$

and hence

$$(\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{w} = x\frac{\partial x}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\bigg|_P + y\frac{\partial y}{\partial y}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\bigg|_P + z\frac{\partial z}{\partial z}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\bigg|_P$$
$$= \mathbf{w}$$

We did not differentiate the $\left.\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}\right|_P, \left.\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}\right|_P, \left.\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}\right|_P$, since they have been evaluated at P and so are constants for the moment Thus, using (417), we obtain

$$\mathbf{w} = \tfrac{1}{2}\nabla(\mathbf{r}\cdot\mathbf{w}) + \tfrac{1}{2}(\nabla\times\mathbf{w})\times\mathbf{r} \qquad (419)$$

Moreover, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_P + \mathbf{w}$, so that $\nabla\times\mathbf{v} = \nabla\times\mathbf{w} = (\nabla\times\mathbf{v})_P$ [see (418)], and

$$\boxed{\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_P + \tfrac{1}{2}(\nabla\times\mathbf{v})_P\times\mathbf{r} + \tfrac{1}{2}\nabla(\mathbf{r}\cdot\mathbf{w})} \qquad (420)$$

It is easy to verify that $\mathbf{r}\cdot\mathbf{w}$ is a quadratic form, that is,

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{w} = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy$$

and so by a rotation (Sec 107), we can write

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{w} = ax^2 + by^2 + cz^2$$

and

$$\tfrac{1}{2}\nabla(\mathbf{r}\cdot\mathbf{w}) = ax\mathbf{i} + by\mathbf{j} + cz\mathbf{k}$$

We may now write (420) as

$$\boxed{\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} + (ax\mathbf{i} + by\mathbf{j} + cz\mathbf{k})} \qquad (421)$$

where $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\nabla\times\mathbf{v})_P$.

Let us analyze (421), which states that the velocity of Q is the sum of three parts

1 The velocity $\mathbf{v}_P$ of P, which corresponds to a translation of the element

2 $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$ represents the velocity due to a rotation about a line through P with angular velocity $\frac{1}{2}(\nabla\times\mathbf{v})_P$

3 $ax\mathbf{i} + by\mathbf{j} + cz\mathbf{k}$ represents a velocity relative to P with components ax, by, cz, respectively, along the x, y, z axes

The first two are rigid-body motions; they could still take place if the fluid were a solid The third term shows that particles at

different distances from P move at different rates relative to P If we consider a sphere surrounding P, the spherical element is translated, rotated, and stretched in the directions of the principal axes by amounts proportional to a, b, c Hence the sphere is deformed into an ellipsoid This third motion is called a pure strain and takes place only when a substance is deformable Each point of the fluid will have the three principal directions associated with it Unfortunately, these directions are not the same at all points, so that no single coordinate system will suffice for the complete fluid

The most general motion of a fluid is that described above and is independent of the coordinate system used to describe the motion It is therefore an intrinsic property of the fluid

113. Vortex Motion If at each point of a curve the tangent vector is parallel to the vector $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{v})$, we say that the curve is a vortex line This implies that $\dfrac{dx}{\omega_x} = \dfrac{dy}{\omega_y} = \dfrac{dz}{\omega_z}$ where dx, dy, dz are the components of the tangent vector and

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$$

The integration of this system of differential equations yields the vortex lines The vortex lines may change as time goes on, since, in general, $\boldsymbol{\omega}$ will depend on the time

Let us now calculate the *circulation* around any closed curve in the fluid.

$$C = \oint_\Gamma \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} \tag{422}$$

If $\nabla \times \mathbf{v} \equiv 0$, then $C = 0$. This is true while we keep the curve Γ fixed in space Let us now find out how the circulation changes with time if we let the particles which comprise Γ move according to the motion of the fluid As time goes on, assuming continuity of flow, the closed curve will remain closed

Now

$$C = \oint_{\Gamma'} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\Gamma'} \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}\, ds \tag{423}$$

where s is arc length along the particular curve Γ', at some time t At an instant later the curve Γ' has moved to a new position given by the curve Γ''. The velocity of the particles over this path is

slightly different from that over Γ', and, moreover, the unit tangents $\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$ have changed The parameter s is still a variable of integration and has nothing to do with the time Therefore

$$\frac{dC}{dt} = \oint_{\Gamma'} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}\,ds + \oint_{\Gamma'} \mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right) ds$$

$$= \oint_{\Gamma'} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}\,ds + \oint_{\Gamma'} \mathbf{v} \cdot \frac{d}{ds}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) ds \tag{424}$$

Euler's equation of motion (411) for a conservative field,

$$\mathbf{f} = -\nabla\chi$$

is $\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla\chi - \dfrac{1}{\rho}\nabla p = -\nabla V$, where $V = \chi + \int dp/\rho$ Therefore

$$\frac{dC}{dt} = -\oint \nabla V \cdot d\mathbf{r} + \oint \frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds}\,ds$$

$$= -\oint d(V - \tfrac{1}{2}v^2) \equiv 0 \tag{425}$$

We have arrived at a theorem by Lord Kelvin that the circulation around a closed curve composed of a given set of particles remains constant if the field is conservative, provided that the density ρ is a function only of the pressure p

If we now consider a closed curve lying on a tube made up of vortex lines, but not encircling the tube (see Fig 97), then

$$C = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

$$= \iint_S \nabla \times \mathbf{v} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0$$

since $d\boldsymbol{\sigma}$ is normal to $\nabla \times \mathbf{v}$. From Kelvin's theorem, $C = 0$ for all time, so that the curve Γ always lies on the vortex tube

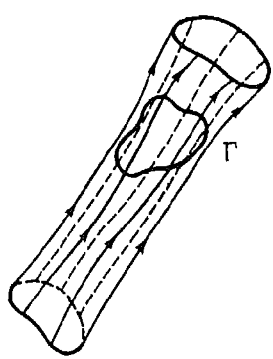

FIG 97

114. Applications

Example 109 Let us consider the steady irrotational motion of an incompressible fluid when a sphere moves through the fluid

with constant velocity Let the center of the sphere travel along the z axis with velocity $\mathbf{v}_0$. We choose the center of the sphere as the origin of our coordinate system From Sec 110, Prob 6, we have

$$\mathbf{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

and

$$\nabla \cdot \left(\frac{D\mathbf{r}}{dt}\right) = 0$$

Hence $\dfrac{D\mathbf{r}}{dt} = \nabla\varphi$, so that $\nabla^2\varphi = 0$. Now at points on the surface of the sphere we must have $\left(\dfrac{D\mathbf{r}}{dt}\right)_{\text{radially}} = 0$, so that $\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=a} = 0$

We look for a solution of Laplace's equation satisfying this boundary condition, so that we try

$$\varphi = \left(Ar + \frac{B}{r^2}\right)\cos\theta \tag{426}$$

(see Sec 67) We need

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=a} = \left(A - \frac{2B}{a^3}\right)\cos\theta = 0$$

so that $B = a^3A/2$ Moreover, at infinity we expect the velocity of the fluid to be zero, so that the velocity relative to the sphere should be $-\mathbf{v}_0$ Hence

$$v_z = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=\infty} = A = -v_0$$

and

$$\varphi = -v_0\left(r + \frac{a^3}{2r^2}\right)\cos\theta \tag{427}$$

The velocity of the fluid relative to the sphere is given by $\mathbf{v} = \nabla\varphi$ and the velocity of the fluid is $\mathbf{v} = \nabla\varphi + v_0\mathbf{k}$.

Example 110 Let us consider a fluid resting on a horizontal surface (x-y plane) and take z vertical Let us assume a transverse wave traveling in the x direction For an incompressible

fluid

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{428}$$

We assume a solution of the form $\varphi = A(z)e^{\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)i}$ Substituting into (428), we obtain

$$e^{\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)i}\left[-\frac{4\pi^2}{\lambda^2}A(z) + \frac{d^2A}{dz^2}\right] = 0$$

so that

$$\frac{d^2A}{dz^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2}A \tag{429}$$

The solution to (429) is $A = A_0e^{(2\pi/\lambda)z} + B_0e^{-(2\pi/\lambda)z}$, and a real solution to (428) is

$$\varphi = (A_0e^{(2\pi/\lambda)z} + B_0e^{-(2\pi/\lambda)z}) \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right] \tag{430}$$

The fluid has no vertical velocity at the bottom of the plane on which it rests, so that $v_z = \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$ at $z = 0$ This yields $A_0 = B_0$, so that

$$\begin{aligned}\varphi &= A_0(e^{(2\pi/\lambda)z} + e^{-(2\pi/\lambda)z}) \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right] \\ &= \frac{A_0}{2}\cosh\left(\frac{2\pi}{\lambda}z\right)\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right] \end{aligned} \tag{431}$$

From Prob 8, Sec 110, we have

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\left(\chi + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2\right) + C(t)$$

and for a gravitational potential, $\chi = gz$, so that

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\left(gz + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2\right) + C(t) \tag{432}$$

We now assume that the waves are restricted to small amplitudes and velocities, so that we neglect $\frac{1}{2}v^2$. Moreover, at the

surface, p, the atmospheric pressure, is essentially constant, so that $\frac{dp}{dt} = 0$ Differentiating (432), we obtain

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{dC}{dt} \tag{433}$$

and again at the surface $\frac{\partial z}{\partial t} = v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$, so that (433) becomes

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{dC}{dt} \tag{434}$$

Substituting (431) into (434), we obtain

$$-v^2 \frac{2\pi^2}{\lambda^2} A_0 \cosh \frac{2\pi}{\lambda} z \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right] = -\frac{g\pi A_0}{\lambda} \sinh \frac{2\pi}{\lambda} z \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right] + \frac{dC}{dt} \tag{435}$$

In order for C to be dependent only on t, we must have the coefficient of $\cos [(2\pi/\lambda)(x - vt)]$ identically zero in (435) Hence

$$A_0 \left(-\frac{v^2 2\pi^2}{\lambda^2} \cosh \frac{2\pi}{\lambda} z + \frac{\pi g}{\lambda} \sinh \frac{2\pi}{\lambda} z \right) = 0 \tag{435a}$$

or

$$v^2 = \frac{\lambda g}{2\pi} \tanh \frac{2\pi}{\lambda} z$$

In deep water z/λ is large so that $\tanh \frac{2\pi}{\lambda} z \approx 1$, and the velocity of the wave is $v = (\lambda g/2\pi)^{\frac{1}{2}}$

Problems

1 Show that for steady motion of an incompressible fluid under the action of conservative forces, $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} = 0$, where $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}$.

2 Show that $\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla\right) \mathbf{v}$ for a conservative system

3. If C is the circulation around any closed circuit moving with the fluid, prove that $\dfrac{dC}{dt} = \oint p\, d\left(\dfrac{1}{\rho}\right)$ if the field is conservative and if the pressure depends only on the density.

4 Show that $\mathbf{v} = 2axy\mathbf{i} + a(x^2 - y^2)\mathbf{j}$ is a possible velocity of an incompressible fluid

5 Verify that the velocity potential $\varphi = A[r + (a^2/r)] \cos \theta$ represents a stream motion past a fixed circular cylinder

115. Small Displacements. Strain Tensor. In the absence of external forces, a solid body remains in equilibrium and the forces between the various particles of the solid are in equilibrium because of the configuration of the particles If external forces are added, the particles (atoms, molecules) tend to redistribute themselves so that equilibrium will occur again Here we are interested in the kinematic relationship between the old positions of equilibrium and the new We shall assume that the deformations are small and continuous We expect, from Sec 112, that in the neighborhood of a given point P_0, the remaining points will be rotated about P_0 and will suffer a pure strain relative to P_0 Let $\mathbf{r}$ be the position vector of P relative to P_0, and let $\mathbf{s}$ be the displacement vector suffered by P, and $\mathbf{s}_0$ the displacement suffered by P_0 (Fig 98). Then

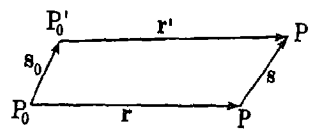

FIG 98.

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + d\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + (\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{s}_0 \tag{436}$$

Let $\mathbf{s} = u(x, y, z, t)\mathbf{i} + v(x, y, z, t)\mathbf{j} + w(x, y, z, t)\mathbf{k}$. Since we will be dealing with static conditions,

$$\mathbf{s} = u(x, y, z)\mathbf{i} + v(x, y, z)\mathbf{j} + w(x, y, z)\mathbf{k}$$

From (420),

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + \tfrac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{s})_{P_0} \times \mathbf{r} + \tfrac{1}{2}\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{w}) \tag{437}$$

where

$$\mathbf{w} = x\left.\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial x}\right|_{P_0} + y\left.\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial y}\right|_{P_0} + z\left.\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z}\right|_{P_0}$$

since $\mathbf{s} = \mathbf{v}\,\Delta t$

We are interested in the position of P after the deformation (now P') relative to the new position of P_0 (now P_0') This is

the vector $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{s} - \mathbf{s}_0$, or

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \tfrac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{s})_{P_0} \times \mathbf{r} + \tfrac{1}{2}\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{w}) \tag{438}$$

Since $\frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{s})_{P_0} \times \mathbf{r}$ represents a rigid-body rotation about P_0, we ignore this nondeformation term and so are interested in $\mathbf{r} + \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{w})$. Now

$$\begin{aligned}\mathbf{r} + \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{r}\cdot\mathbf{w}) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ &+ \frac{1}{2}\nabla\left(x^2 \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{P_0} + xy\frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{P_0} + xz\frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_{P_0}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\nabla\left(xy \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{P_0} + y^2\frac{\partial v}{\partial y}\bigg|_{P_0} + yz\frac{\partial w}{\partial y}\bigg|_{P_0}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\nabla\left(zx \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{P_0} + zy\frac{\partial v}{\partial z}\bigg|_{P_0} + z^2\frac{\partial w}{\partial z}\bigg|_{P_0}\right)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\mathbf{r} + \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{r}\cdot\mathbf{w}) \\ &= \left[x\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{y}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{z}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\mathbf{i} \\ &+ \left[\frac{x}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + y\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{z}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]\mathbf{j} \\ &+ \left[\frac{x}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{y}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) + z\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]\mathbf{k}\end{aligned} \tag{439}$$

The partial derivatives are evaluated at the point P_0

Let us now consider the matrix

$$\|s_j{}^i\| = \begin{Vmatrix} 1 + \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & 1 + \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) & 1 + \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{Vmatrix} \tag{440}$$

The nine components of this matrix form the *strain tensor* If we write $\mathbf{r} = x^1\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + x^3\mathbf{k}$ and $\mathbf{r}' = y^1\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + y^3\mathbf{k}$ (see

Example 8), then $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{r}\cdot\mathbf{w})$ may be written

$$y^i = s_1{}^i x^1 + s_2{}^i x^2 + s_3{}^i x^3, \qquad i = 1, 2, 3$$

or

$$\boxed{y^i = \sum_{\alpha=1}^{3} s_\alpha{}^i x^\alpha} \tag{441}$$

We shall see in Chap 8 that since r and r′ are vectors, then, of necessity, the $s_j{}^i$ are the components of a tensor. Notice that $s_j{}^i = s_i{}^j$, so that the tensor is symmetric

The ellipsoid which has the equation

$$\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)x^2 + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)y^2 + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)z^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)xy + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)yz + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)zx = 1 \tag{442}$$

is called the *strain ellipsoid* From Sec 107 we know that we can reduce the ellipsoid to the form

$$Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 = 1$$

by a proper rotation The strain tensor becomes entirely diagonal,

$$\|\bar{s}_j{}^i\| = \begin{Vmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{Vmatrix}$$

In the directions of the new x', y', z' axes, the deformation is a pure translation, and these directions are called the principal directions of the strain ellipsoid

Let us now compute the change in the unit vectors, neglecting the rotation term The unit vector **i** has the components (1, 0, 0), so that from (438) and (439)

$$\mathbf{i} \rightarrow \mathbf{r}_1 = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\mathbf{i} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\mathbf{k}$$

By neglecting higher terms such as $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}, \cdot$, we have $|\mathbf{r}_1| = \left|1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right|$ Similarly $\mathbf{j} \rightarrow \mathbf{r}_2$, and $|\mathbf{r}_2| = \left|1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right|$, $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{r}_3$,

and $|\mathbf{r}_3| = \left|1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right|$ The angle between $\mathbf{r}_1$ and $\mathbf{r}_2$ is given by

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1||\mathbf{r}_2|} \approx \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

The terms of the strain tensor are now fully understood The volume of the parallelepiped formed by $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ is

$$V' = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3 \approx 1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

so that

$$\boxed{\frac{V' - V}{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{s}} \tag{443}$$

The left-hand side of (443) is independent of the coordinate system, so that $\nabla \cdot \mathbf{s}$ is an invariant

Finally, we see that the deformation tensor due to the tensor $\frac{1}{2}\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{w})$ has the components

$$\|e_i^{\,j}\| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{matrix} \right\|$$

$$= \left\| \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^j}{\partial x^i}\right) \right\| \tag{444}$$

where

$$\begin{aligned} u^1 &= u, & x^1 &= x \\ u^2 &= v, & x^2 &= y \\ u^3 &= w, & x^3 &= z \end{aligned}$$

116. The Stress Tensor. Corresponding to any strain in the body must be an impressed force which produces this strain Let us consider a cube with faces perpendicular to the coordinate axes In Sec 108 we assumed no shearing stresses, but now we consider all forces possible between two neighboring surfaces

Let us consider the face $ABCD$ (Fig 99) It is in immediate contact with other particles of the body As a consequence, the resultant force t_x on the face $ABCD$ can be decomposed into three forces t_{xx}, t_{yx}, t_{zx}, where t_{xx} is the component of t_x in the x direction, t_{yx} is the component of t_x in the y direction, and t_{zx} is the

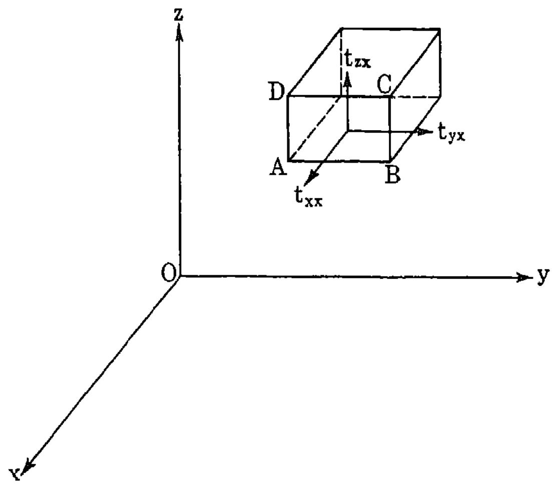

FIG 99

component of t_x in the z direction We have similar results for the other two faces and so obtain the matrix

$$\|t\| = \begin{Vmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{Vmatrix} \tag{445}$$

These are the components of the stress tensor

By considering a tetrahedron as in Sec 108, we immediately see that if $d\boldsymbol{\sigma}$ is the vectoral area of the slant face, then the components of the force $\mathbf{f}$ on this face are

$$\begin{aligned} f_x &= t_{xx}\,ds_x + t_{xy}\,ds_y + t_{xz}\,ds_z \\ f_y &= t_{yx}\,ds_x + t_{yy}\,ds_y + t_{yz}\,ds_z \\ f_z &= t_{zx}\,ds_x + t_{zy}\,ds_y + t_{zz}\,ds_z \end{aligned} \tag{446}$$

where $ds_x = \mathbf{i} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$, $ds_y = \mathbf{j} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$, $ds_z = \mathbf{k} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$.

We immediately see that

$$t_{xx} = \frac{\partial f_x}{\partial s_x}, \qquad t_{xy} = \frac{\partial f_x}{\partial s_y},$$

and that $f_i = \sum_{\alpha=1}^{3} t_{i\alpha}\, ds_\alpha$, where $f_1 = f_x$, $f_2 = f_y$, $f_3 = f_z$, $t_{12} = t_{xy}$,

We shall see later that this explains why the t_{ij} are called the components of a tensor

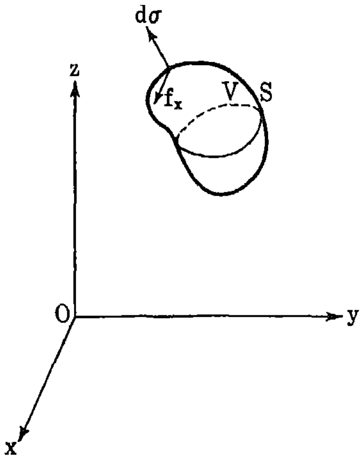

FIG 100

Let us now consider the resultant force acting on a volume V with boundary S (see Fig 100) We have from (446)

$$f_x = t_{xx}\, ds_x + t_{xy}\, ds_y + t_{xz}\, ds_z$$

so that

$$F_x = \sum f_x = \iint_S t_{xx}\, ds_x + t_{xy}\, ds_y + t_{xz}\, ds_z$$

$$= \iint_S \mathbf{t} \cdot d\boldsymbol{\sigma}$$

where $\mathbf{t} = t_{xx}\mathbf{i} + t_{xy}\mathbf{j} + t_{xz}\mathbf{k}$.

Applying the divergence theorem, we obtain

$$F_x = \iiint_V \left(\frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} \right) d\tau \tag{447}$$

with similar expressions for F_y, F_z

By letting $V \to 0$, we have that the x component of the force per unit volume must be $\left(\frac{\partial t_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial t_{xz}}{\partial z} \right)$

117. Relationship between the Strain and Stress Tensors. In the neighborhood of a point P in our region, let us choose the three principal directions of the stress tensor for the axes of our cartesian coordinate system If we assume that the region is isotropic (only contractions and extensions exist), a cube with faces normal to the principal directions will suffer distortions only along the principal axes Hence the principal directions of the

strain ellipsoid will coincide with those of the stress ellipsoid In this coordinate system

$$\|e_{ij}\| = \begin{Vmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{Vmatrix}, \qquad \|t_{ij}\| = \begin{Vmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & t_3 \end{Vmatrix} \tag{448}$$

Our fundamental postulate relating the shear components with those of the stress will be Hooke's law, which states that every tension produces an extension in the direction of the tension and is proportional to it We let E (Young's modulus) be the factor of proportionality Experiments also show that extensions in fibers produce transverse contractions The constant for this phenomenon is called Poisson's ratio σ We thus obtain for the relative elongations of the cube in the three principal directions the following

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{E} t_1 - \frac{\sigma}{E}(t_2 + t_3) = \frac{1+\sigma}{E} t_1 - \frac{\sigma}{E}(t_1 + t_2 + t_3) \\ e_2 &= \frac{1}{E} t_2 - \frac{\sigma}{E}(t_3 + t_1) = \frac{1+\sigma}{E} t_2 - \frac{\sigma}{E}(t_1 + t_2 + t_3) \\ e_3 &= \frac{1}{E} t_3 - \frac{\sigma}{E}(t_1 + t_2) = \frac{1+\sigma}{E} t_3 - \frac{\sigma}{E}(t_1 + t_2 + t_3) \end{aligned} \tag{449}$$

The formulas for e_1, e_2, e_3 apply only in the immediate neighborhood of a point P Since points far removed from P will have different stress ellipsoids, the principal directions will vary from point to point Hence no single coordinate system will exist that would enable the stress and strain components to be related by the simple law of (449) Let us therefore transform the components of the stress and strain tensors so that they may be referred to a single coordinate system The reader should read Chap 8 to understand what follows If he desires not to break the continuity of the present paragraph, he may take formula (456) with a grain of salt, at least for the present Example 8, Probs 21 and 22 of Sec 11, and Prob 21 of Sec 15 will aid the reader in what follows

If x^1, x^2, x^3 are the coordinates above, and if we change to a new coordinate system $\bar{x}^1$, $\bar{x}^2$, $\bar{x}^3$ where

$$\bar{x}^i = \sum_{\alpha=1}^{3} a_\alpha{}^i x^\alpha, \qquad i = 1, 2, 3 \tag{450}$$

then the transformation (450) is said to be linear Notice that the origin (0, 0, 0) remains invariant If, furthermore, we desire distance to be preserved, we must have

$$\sum_{i=1}^{3} (\bar{x}^i)^2 = \sum_{i=1}^{3} (x^i)^2$$

In Chap 8 we shall easily show that this requires

$$\sum_{\alpha=1}^{3} a_i^\alpha a_j^\alpha = \delta_{ij} \quad \begin{aligned} &= 0 \text{ if } i \neq j \\ &= 1 \text{ if } i = j \end{aligned} \tag{451}$$

Equation (451) is the requirement that (450) be a rotation of axes Moreover, since we are dealing with tensors, we shall see that the components of the strain tensor in the x^1-x^2-x^3 coordinate system are related to the components in the $\bar{x}^1$-$\bar{x}^2$-$\bar{x}^3$ system by the following rule

$$\bar{e}_{ij} = \sum_{\beta=1}^{3} \sum_{\alpha=1}^{3} a_i^\alpha a_j^\beta e_{\alpha\beta} \tag{452}$$

If we now let $i = j$ and sum on i, we obtain

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} \bar{e}_{ii} &= \sum_{i=1}^{3} \sum_{\beta=1}^{3} \sum_{\alpha=1}^{3} a_i^\alpha a_i^\beta e_{\alpha\beta} \\ &= \sum_{\beta=1}^{3} \sum_{\alpha=1}^{3} \delta^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha=1}^{3} e_{\alpha\alpha} \end{aligned}$$

so that

$$\bar{e}_{11} + \bar{e}_{22} + \bar{e}_{33} = e_{11} + e_{22} + e_{33} = e_1 + e_2 + e_3 \tag{453}$$

This is an invariant obtained from the strain tensor [see (443)]. A similar expression is obtained for the stress tensor, namely, that

$$\bar{t}_{11} + \bar{t}_{22} + \bar{t}_{33} = t_{11} + t_{22} + t_{33} = t_1 + t_2 + t_3$$

Equations (449) may now be written as

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1+\sigma}{E} t_1 + \psi \\ e_2 &= \frac{1+\sigma}{E} t_2 + \psi \\ e_3 &= \frac{1+\sigma}{E} t_3 + \psi \end{aligned} \tag{454}$$

where ψ is the invariant

$$-\frac{\sigma}{E}(t_1 + t_2 + t_3) = -\frac{\sigma}{E}(\bar{t}_{11} + \bar{t}_{22} + \bar{t}_{33})$$

From Eq (452) we have

$$\bar{e}_{ij} = \sum_{\beta=1}^{3} \sum_{\alpha=1}^{3} a_i^{\alpha} a_j^{\beta} e_{\alpha\beta}$$

and since $e_{\alpha\beta} = 0$ unless $\alpha = \beta$ [see (448)], we obtain

$$\begin{aligned}
\bar{e}_{ij} &= \sum_{\alpha=1}^{3} a_i^{\alpha} a_j^{\alpha} e_{\alpha\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{3} a_i^{\alpha} a_j^{\alpha} e_{\alpha} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{3} a_i^{\alpha} a_j^{\alpha} \left(\frac{1+\sigma}{E} t_{\alpha} + \psi \right) \\
&= \frac{1+\sigma}{E} \sum_{\alpha=1}^{3} a_i^{\alpha} a_j^{\alpha} t_{\alpha} + \psi \sum_{\alpha=1}^{3} a_i^{\alpha} a_j^{\alpha}
\end{aligned}$$

and

$$\boxed{\bar{e}_{ij} = \frac{1+\sigma}{E} \bar{t}_{ij} + \psi \delta_{ij}} \tag{455}$$

since $\bar{t}_{ij} = \sum_{\beta=1}^{3} \sum_{\alpha=1}^{3} a_i^{\alpha} a_j^{\beta} t_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha=1}^{3} a_i^{\alpha} a_j^{\alpha} t_{\alpha}$

Equation (455) is the relationship between the components of the strain and stress tensors when referred to a single coordinate system We have

$$\begin{aligned}
\bar{e}_{11} &= \frac{1+\sigma}{E} \bar{t}_{11} - \frac{\sigma}{E}(\bar{t}_{11} + \bar{t}_{22} + \bar{t}_{33}) \\
\bar{e}_{22} &= \frac{1+\sigma}{E} \bar{t}_{22} - \frac{\sigma}{E}(\bar{t}_{11} + \bar{t}_{22} + \bar{t}_{33}) \\
\bar{e}_{33} &= \frac{1+\sigma}{E} \bar{t}_{33} - \frac{\sigma}{E}(\bar{t}_{11} + \bar{t}_{22} + \bar{t}_{33}) \\
\bar{e}_{12} &= \frac{1+\sigma}{E} \bar{t}_{12} \\
\bar{e}_{23} &= \frac{1+\sigma}{E} \bar{t}_{23} \\
\bar{e}_{31} &= \frac{1+\sigma}{E} \bar{t}_{31}
\end{aligned} \tag{456}$$

Solving Eqs (456) for the $\bar{t}_{ij}$ and removing the bars, we obtain

$$
\begin{aligned}
t_{11} &= \frac{E}{1+\sigma}\left[e_{11} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}(e_{11}+e_{22}+e_{33})\right] \\
&= \frac{E}{1+\sigma}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] \\
t_{22} &= \frac{E}{1+\sigma}\left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] \\
t_{33} &= \frac{E}{1+\sigma}\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\nabla\cdot\mathbf{s}\right) \qquad (457)\\
t_{12} &= t_{21} = \frac{E}{1+\sigma}e_{12} = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
t_{23} &= t_{32} = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\
t_{31} &= t_{13} = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)
\end{aligned}
$$

Equation (447) now becomes

$$
\begin{aligned}
F_x &= \left\{\frac{E}{1+\sigma}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}\right)\right]\right. \\
&\qquad \left. + \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\right\} \\
&= \frac{E}{2(1+\sigma)}\left[\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] \\
&= \frac{E}{2(1+\sigma)}\left[\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial}{\partial x}(\nabla\cdot\mathbf{s})\right]
\end{aligned}
$$

The forces per unit volume in the y and z directions are

$$
F_y = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left[\nabla^2 v + \frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial}{\partial y}(\nabla\cdot\mathbf{s})\right]
$$

$$
F_z = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left[\nabla^2 w + \frac{1}{1-2\sigma}\frac{\partial}{\partial z}(\nabla\cdot\mathbf{s})\right]
$$

so that

$$
\mathbf{f} = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left[\nabla^2\mathbf{s} + \frac{1}{1-2\sigma}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{s})\right] \qquad (458)
$$

If we let $\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + \mathbf{R}_z\mathbf{k}$ be the external body force per unit volume, ρ the density of the medium, then Newton's second

law of motion yields

$$\mathbf{R} + \frac{E}{2(1+\sigma)}\left[\nabla^2\mathbf{s} + \frac{1}{1-2\sigma}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{s})\right] = \rho\frac{\partial^2\mathbf{s}}{\partial t^2} \tag{459}$$

For the case $\mathbf{R} = 0$, (459) reduces to

$$\frac{E}{2(1+\sigma)}\left[\nabla^2\mathbf{s} + \frac{1}{1-2\sigma}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{s})\right] = \rho\frac{\partial^2\mathbf{s}}{\partial t^2} \tag{460}$$

In Sec 70 we saw that a vector could be written as the sum of a solenoidal and an irrotational vector Let $\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$, where $\nabla\cdot\mathbf{s}_1 = 0$ and $\nabla\times\mathbf{s}_2 = 0$ Since (460) is linear in $\mathbf{s}$, we can consider it as satisfied by $\mathbf{s}_1$ and $\mathbf{s}_2$. This yields

$$\frac{E}{2(1+\sigma)}\nabla^2\mathbf{s}_1 = \rho\frac{\partial^2\mathbf{s}_1}{\partial t^2}$$

and

$$\frac{E}{2(1+\sigma)}\left[\nabla^2\mathbf{s}_2 + \frac{1}{1-2\sigma}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{s}_2)\right] = \rho\frac{\partial^2\mathbf{s}_2}{\partial t^2} \tag{461}$$

However,

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{s}_2) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{s}_2) - \nabla^2\mathbf{s}_2 = 0$$

so that

$$\frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\nabla^2\mathbf{s}_2 = \rho\frac{\partial^2\mathbf{s}_2}{\partial t^2} \tag{462}$$

In Sec 80, we saw that (461) leads to a transverse wave moving with speed $V_t = \sqrt{E/2(1+\sigma)\rho}$

Equation (462) is also a wave equation, but the wave is not transverse Let us assume that the wave is traveling along the x axis Then

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_2 &= \mathbf{s}_2(x - Vt) \\
&= u(x - Vt)\mathbf{i} + v(x - Vt)\mathbf{j} + w(x - Vt)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{s}_2 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0 \\
&= -\frac{\partial w}{\partial x}\mathbf{j} + \frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{k} = 0
\end{aligned}$$

so that w and v are independent of x and therefore are independent of $x - Vt$ We are not interested in constant displacements, so that $\mathbf{s}_2 = u(x - Vt)\mathbf{i}$, and the displacement of $\mathbf{s}_2$ is parallel to the direction of propagation of the wave The wave is therefore longitudinal. The speed of the wave is

$$V_l = \sqrt{\frac{E(1-\sigma)}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}}$$

In general, both types of waves are produced, this result being useful in the study of earthquakes

Problems

1 Derive (451)

2 If f^1, f^2, f^3 are the components of a vector for a cartesian coordinate system, prove that the components $\bar{f}^1, \bar{f}^2, \bar{f}^3$ of this vector in a new cartesian coordinate system are related to the old components by the rule $\bar{f}^i = \sum_{\alpha=1}^{3} a_\alpha^i f^\alpha$, $i = 1, 2, 3$, using the coordinate transformation (450)

3 If the body forces are negligible and if the medium is in a state of equilibrium, show that $\nabla^2\mathbf{s} + \dfrac{1}{1-2\sigma}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{s}) = 0$

4 If the strain of Prob 3 is radial, that is, if $\mathbf{s} = s(r)\mathbf{r}$, find the differential equation satisfied by $s(r)$

5 Assuming $\sigma = 0$ for a long thin bar, find the velocity of propagation of the longitudinal waves

6 If $\mu = E/2(1+\sigma)$ (modulus of rigidity) and

$$\lambda = \frac{E\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}$$

show that Eq (459) becomes

$$\mathbf{R} + \mu\nabla^2\mathbf{s} + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{s}) = \rho\frac{\partial^2\mathbf{s}}{\partial t^2}$$

7 Why do we use $\dfrac{\partial^2\mathbf{s}}{\partial t^2}$ instead of $\dfrac{d^2\mathbf{s}}{dt^2}$ in (459)?

8 A coaxial cable is made by filling the space between a solid core of radius a and a concentric cylindrical shell of internal radius b with rubber If the core is displaced a small distance

axially, find the displacement in the rubber. Assume that end effects, gravity, and the distortion of the metal can be neglected

118. Navier-Stokes Equation. We are now in a position to derive the equations of motion of a viscous fluid In the case of nonviscous fluids, we assumed no friction between adjacent layers of fluid As a result of friction (viscosity), rapidly moving layers tend to drag along the slower layers of fluid, and, conversely, the slower layers tend to retard the motion of the faster layers It is found by experiment that the force of viscosity is directly proportional to the common area A of the two layers and to the gradient of the velocity normal to the flow. If the fluid is moving in the x-y plane with speed v, then the viscous force is

$$F = \eta A \frac{\partial v}{\partial z}$$

since $\frac{\partial v}{\partial z}$ is the gradient of the speed normal to the direction of flow η is called the coefficient of viscosity

We shall let P_{ij} be the stress tensor and σ_{ij} the strain tensor for the fluid analogous to t_{ij} and e_{ij} of the previous paragraphs We have

$$P_{12} = \frac{E}{2(1+\sigma)}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

where u, v, w are the components of the velocity vector $\mathbf{v}$ (see Sec 112) For a fluid moving in the y direction with a gradient in the x direction, we have $u = 0$ and $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, so that

$$P_{12} = \frac{E}{2(1+\sigma)}\frac{\partial v}{\partial x} = \eta \frac{\partial v}{\partial x}$$

Hence the term $\frac{E}{2(1+\sigma)}$ must be replaced by η

In addition to the stress components due to viscosity, we must add the stress components due to the pressure field, which we assume to be

$$\begin{Vmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{Vmatrix}$$

The equations of (457) become

$$\boxed{P_{ij} = 2\eta\sigma_{ij} + \lambda(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\delta_{ij} - p\delta_{ij}} \tag{463}$$

where λ is undetermined as yet Now let $i = j$ and sum on j We see that

$$P_{11} + P_{22} + P_{33} = (2\eta + 3\lambda)(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) - 3p$$

We know that $P_{11} + P_{22} + P_{33}$ is an invariant and that for the static case $P_{11} + P_{22} + P_{33} = -3p$ Consequently we choose $2\eta + 3\lambda = 0$, so that (463) becomes

$$p_{ij} \equiv P_{ij} = 2\eta\sigma_{ij} - \tfrac{2}{3}\eta(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) - p\delta_{ij} \tag{464}$$

for small velocities Moreover, the velocity vector is given by

$$\mathbf{v} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$$

and $\sigma_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x^j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x^i}\right)$, so that $\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$

To obtain the equations of motion, we note that from (447)

$$f_1 = \frac{\partial p_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial p_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial p_{13}}{\partial x^3} \qquad \text{where } \begin{aligned} x^1 &= x \\ x^2 &= y \\ x^3 &= z \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial p_{1j}}{\partial x^j}$$

and in general $f_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial p_{ij}}{\partial x^j}$ Hence

$$\rho F_i + f_i = \rho \frac{du_i}{dt}$$

becomes

$$\rho F_i + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial p_{ij}}{\partial x^j} = \rho \frac{du_i}{dt} \tag{465}$$

where F_i is the external force per unit mass From (464)

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial x^j} = 2\eta \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x^j} - \frac{2}{3}\eta \frac{\partial(\operatorname{div} \mathbf{v})}{\partial x^j}\delta_{ij} - \frac{\partial p}{\partial x^j}\delta_{ij}$$

$$= \eta \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right) - \frac{2}{3}\eta \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{v})}{\partial x^j}\delta_{ij} - \frac{\partial p}{\partial x^j}\delta_{ij}$$

and

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial p_{ij}}{\partial x^j} = \eta \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right) - \frac{2}{3}\eta \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{v})}{\partial x^i} - \frac{\partial p}{\partial x^i}$$

The equations of motion (465) are

$$\rho \frac{du_i}{dt} = \rho F_i + \eta \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right) - \frac{2}{3}\eta \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{v})}{\partial x^i} - \frac{\partial p}{\partial x^i} \quad (466)$$

or

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} + \eta \nabla^2 \mathbf{v} - \frac{1}{3}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla p \quad (467)$$

For an incompressible fluid $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, and

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} + \eta \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p$$

Along with (467) we have the equation of continuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

Problems

1. Derive (467) from (466)

2 Consider the steady flow of an incompressible fluid through a small cylindrical tube of radius a in a nonexternal field. Let $\mathbf{v} = v\mathbf{k}$ and show that $p = p(z)$ and $\eta \nabla^2 v = \dfrac{\partial p}{\partial z}$ Show that the boundary conditions are $v = 0$ when $r = a$, and $v = v(r)$, $r^2 = x^2 + y^2$, and that $\dfrac{dp}{dz} = \dfrac{\eta}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dv}{dr}\right)$ Hence show that $v = (A/4\eta)(r^2 - a^2)$, where A is a constant and $\dfrac{dp}{dz} = A$

3 Consider a sphere moving with constant velocity $v_0\mathbf{k}$ (along the z axis) in an infinite mass of incompressible fluid Choose the center of the sphere as the origin of our coordinate system Show that the equation of motion is $\rho \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = \eta \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p$ and that the boundary conditions are $\mathbf{v} = 0$ for $r = a$, $\mathbf{v} = -v_0\mathbf{k}$ at $r = \infty$,

and that for steady motion $\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$ for any quantity ψ associated with the motion Moreover $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ We shall assume that $\mathbf{v}$ and the partial derivatives of $\mathbf{v}$ are small Show that this implies

$$\text{(i)} \qquad \nabla p = \eta \nabla^2 \mathbf{v}$$

Hence prove that $\nabla^2 p = 0$ Now let $\mathbf{v} = -\nabla\varphi + \omega_1 \mathbf{k}$ and show that

$$\text{(ii)} \qquad \frac{\partial \omega_1}{\partial z} = \nabla^2 \varphi$$

Assuming $p = -\eta \nabla^2 \varphi$ and $\nabla^2 \omega_1 = 0$, show that (i) and (ii) will be satisfied

Let $\omega_1 = 3v_0 a/2r$, $\varphi = c_0 z - (v_0 a^3 z/4r^3) + (3v_0 a z/4r)$,

$$p = \frac{3\eta v_0 a z}{2r^3}$$

and show that

$$\begin{gathered} \nabla^2 \omega_1 = 0, \qquad \nabla^2 p = 0, \qquad p = -\eta \nabla^2 \varphi \\ \mathbf{v} = -\nabla\varphi + \omega_1 \mathbf{k} = 0 \text{ for } r = a \\ \mathbf{v} = -v_0 \mathbf{k} \text{ for } r = \infty \end{gathered}$$

4 Solve for the steady motion of an incompressible viscous fluid between two parallel plates, one of the plates fixed, the other moving at a constant velocity, the distance between the plates remaining constant

5 Find the steady motion of an incompressible, viscous fluid surrounding a sphere rotating about a diameter with constant angular velocity No external forces exist

CHAPTER 8

TENSOR ANALYSIS AND RIEMANNIAN GEOMETRY

119. Summation Notation. We shall be interested in sums of the type

$$S = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \tag{468}$$

We can shorten the writing of (468) and write

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_ix_i \tag{469}$$

Now it will be much more convenient to replace the subscripts of the quantities $x_1, x_2, \ldots, x_n$ by superscripts, $x^1, x^2, \ldots, x^n$. The superscripts do not stand for powers but are labels that allow us to distinguish between the various x's. Our sum S now becomes

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_ix^i \tag{470}$$

We can get rid of the summation sign and write

$$\boxed{S = a_ix^i} \tag{471}$$

where the repeated index i is to be summed from 1 to n. This notation is due to Einstein.

Whenever a letter appears once as a subscript and once as a superscript, we shall mean that a summation is to occur on this letter. If we are dealing with n dimensions, we shall sum from 1 to n. The index of summation is a dummy index since the final result is independent of the letter used. We can write $S = a_ix^i = a_jx^j = a_\alpha x^\alpha = a_\beta x^\beta$.

Example 111. If $f = f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, we have from the calculus

$$
\begin{aligned}
df &= \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \\
&= \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} dx^\alpha
\end{aligned}
$$

and

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{dt}$$

Example 112 Let $S = g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta$ The index α occurs both as a subscript and superscript Hence we first sum on α, say from 1 to 3 This yields

$$S = g_{1\beta}x^1x^\beta + g_{2\beta}x^2x^\beta + g_{3\beta}x^3x^\beta$$

Now each term of S has the repeated index β summed, say, from 1 to 3 Hence

$$
\begin{aligned}
S = g_{11}x^1x^1 + g_{12}x^1x^2 + g_{13}x^1x^3 + g_{21}x^2x^1 + g_{22}x^2x^2 + g_{23}x^2x^3 \\
+ g_{31}x^3x^1 + g_{32}x^3x^2 + g_{33}x^3x^3
\end{aligned}
$$

and $S = g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta$ represents the double sum

$$S = \sum_{\beta=1}^{3} \sum_{\alpha=1}^{3} g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta$$

We also notice that the $g_{\alpha\beta}$ can be thought of as elements of a square matrix

$$\begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{Vmatrix}$$

120. The Kronecker Deltas. We define the Kronecker δ^i_j to be equal to zero if $i \neq j$ and to equal one if $i = j$:

$$
\begin{aligned}
\delta^i_j &= 0, \; i \neq j \\
&\; 1, \; i = j
\end{aligned}
\tag{472}
$$

We notice that $\delta^1_1 = \delta^2_2 = \cdots = \delta^n_n = 1$,

$$
\begin{aligned}
\delta^1_2 = \delta^1_3 = \cdots = \delta^r_{r+1} = 0 \\
\delta^\alpha_\alpha = \delta^1_1 + \delta^2_2 + \cdots + \delta^n_n = n
\end{aligned}
$$

If $x^1, x^2, \ldots, x^n$ are n independent variables, then $\dfrac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta^i_j$, for if $i = j$, $\dfrac{\partial x^i}{\partial x^j} = 1$, and if $i \neq j$, there is no change in the variable x^i if we change x^j since they are independent variables, so that $\dfrac{\partial x^i}{\partial x^j} = 0$

Example 113 Let $S = a_\alpha x^\alpha$ Then $\dfrac{\partial S}{\partial x^\mu} = a_\alpha \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial x^\mu}$, and

$$\frac{\partial S}{\partial x^\mu} = a_\alpha \delta^\alpha_\mu$$

Now $\delta^\alpha_\mu = 0$ except when $\alpha = \mu$, so that on summing on α we obtain $\dfrac{\partial(a_\alpha x^\alpha)}{\partial x^\mu} = a_\mu$

Example 114 Let $S = a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta \equiv 0$ for all values of the variables $x^1, x^2, \ldots, x^n$. We show that $a_{ij} + a_{ji} = 0$ First differentiate S with respect to x^i and obtain

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial x^i} &= a_{\alpha\beta}x^\alpha \frac{\partial x^\beta}{\partial x^i} + a_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^i}x^\beta = 0 \\ &= a_{\alpha\beta}x^\alpha\delta^\beta_i + a_{\alpha\beta}\delta^\alpha_i x^\beta = 0 \\ &= a_{\alpha i}x^\alpha + a_{i\beta}x^\beta = 0\end{aligned}$$

Now differentiate with respect to x^j so that

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^j\,\partial x^i} = a_{\alpha i}\delta^\alpha_j + a_{i\beta}\delta^\beta_j = 0$$

and

$$a_{ji} + a_{ij} \equiv 0$$

We define the generalized Kronecker delta $\delta^{i_1 i_2 \cdots i_m}_{j_1 j_2 \cdots j_m}$ as follows: The superscripts and subscripts can have any value from 1 to n If at least two superscripts or at least two subscripts have the same value, or if the subscripts are not the same set of numbers as the superscripts, then we define the generalized Kronecker delta to be zero If all the superscripts and subscripts are separately distinct, and the subscripts are the same set of numbers as the superscripts, the delta has the value of $+1$, or -1, accord-

ing to whether it requires an even or odd number of permutations to arrange the superscripts in the same order as the subscripts

For example, $\delta^{123}_{123} = 1$, $\delta^{123}_{213} = -1$, $\delta^{123}_{231} = 1$, $\delta^{173}_{163} = 0$,

$$\delta^{1348}_{1438} = -1, \quad \delta^{122}_{123} = \delta^{123}_{221} = \delta^{312}_{323} = 0, \quad \delta^{123}_{ij} = 0$$

It is convenient to define

$$\left.\begin{aligned} \epsilon^{i_1 i_2 \cdots i_n} &= \delta^{i_1 i_2 \cdots i_n}_{12 \cdots n} \\ \text{and} \qquad \epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} &= \delta^{12 \cdots n}_{i_1 i_2 \cdots i_n} \end{aligned}\right\} \tag{473}$$

Problems

1. Write in full $a^i_\alpha x^\alpha = b^i$, $\alpha, i = 1, 2, 3$

2. If $a_{\alpha\beta\gamma}x^\alpha x^\beta x^\gamma \equiv 0$, show that $a_{ijk} + a_{kij} + a_{jki} + a_{jik} + a_{kji} + a_{ikj} = 0$.

3 Show that $\delta^{i_1 i_2 \cdots i_n}_{12 \cdots n}\delta^{12 \cdots n}_{j_1 j_2 \cdots j_n} = \delta^{i_1 i_2 \cdots i_n}_{j_1 j_2 \cdots j_n}$

4 If $y^i = a^i_\alpha x^\alpha$, $z^i = b^i_\alpha y^\alpha$, show that $z^i = b^i_\alpha a^\alpha_\beta x^\beta$

5 Prove that

$$\delta^{rs}_{\alpha\beta}a^{\alpha\beta} = a^{rs} - a^{sr}$$

$$\delta^{rst}_{\alpha\beta\gamma}a^{\alpha\beta\gamma} = a^{rst} + a^{trs} + a^{str} - a^{srt} - a^{tsr} - a^{rts}$$

6 Show that the determinant $\begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{vmatrix}$ can be written

$$\begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{vmatrix} = \epsilon^{ij}a^1_i a^2_j = \epsilon_{ij}a^i_1 a^j_2$$

and that

$$\begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix} = \epsilon^{ijk}a^1_i a^2_j a^3_k = \epsilon_{ijk}a^i_1 a^j_2 a^k_3$$

7 Prove that $\epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} = \epsilon^{i_1 i_2 \cdots i_n}$

8 Show that $\delta^{\alpha\beta}_{ij}\dfrac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x^\beta} = \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x^j} - \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x^i}$.

9 If $y^i = y^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, show that $\delta^i_j = \dfrac{\partial y^i}{\partial x^\alpha}\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial y^j}$ assuming the existence of the derivatives. Also show that $\dfrac{\partial y^i}{\partial x^\alpha}\dfrac{\partial x^\beta}{\partial y^j}\delta^\alpha_\beta = \delta^i_j$ Show that

$$\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^j}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^k} + \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^j\,\partial y^k} = 0$$

10. If $\varphi = \varphi(x^1, x^2, \ldots, x^n)$,

$$x^i = x^i(y^1, y^2, \ldots, y^n) = x^i(y)$$

$i = 1, 2, \ldots, n$, and if

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(y^1, y^2, \ldots, y^n) \equiv \varphi[x^1(y), x^2(y), \ldots, x^n(y)]$$

show that $\dfrac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y^\alpha} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x^\beta}\dfrac{\partial x^\beta}{\partial y^\alpha}$. Given $\varphi_\alpha \equiv \dfrac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}$, show that

$$\frac{\partial\bar{\varphi}_i}{\partial y^j} - \frac{\partial\bar{\varphi}_j}{\partial y^i} = \left(\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x^\alpha}\right)\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}$$

121. Determinants. We define the determinant $|a^i_j|$ by the equation

$$|a^i_j| = \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_n \\ \cdot & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot\ \cdot & \cdot \\ a^n_1 & a^n_2 & \cdots & a^n_n \end{vmatrix} \equiv \epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} a^{i_1}_1 a^{i_2}_2 \cdots a^{i_n}_n$$

$$|a^i_j| \equiv \epsilon^{i_1 i_2 \cdots i_n} a^1_{i_1} a^2_{i_2} \cdots a^n_{i_n} \tag{474}$$

The reader should note that this definition agrees with the definition for the special case of second- and third-order determinants which he has encountered in elementary algebra. The definition of a determinant as given by (474) shows that it consists of a sum of terms, n^n in number. Of these, $n!$ are, in general, different from zero. Each term consists of a product of elements, one element from each row and column. The sign of the term $a^1_{i_1} a^2_{i_2} a^3_{i_3} \cdots a^n_{i_n}$ depends on whether it takes an even or odd permutation to regroup $i_1 i_2 \cdots i_n$ into $12 \cdots n$.

Since i_1 and i_2 are dummy indices, we can interchange them so that

$$|a^i_j| = \epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} a^{i_1}_1 a^{i_2}_2 \cdots a^{i_n}_n \equiv \epsilon_{i_2 i_1 \cdots i_n} a^{i_2}_1 a^{i_1}_2 \cdots a^{i_n}_n$$

An interchange of the subscripts 1 and 2, however, will mean that an extra permutation will be needed on $i_2 i_1 i_3 \cdots i_n$. This changes the sign of the determinant. Hence interchanging two columns (or rows) changes the sign of the determinant. As an

immediate corollary, we have $|a^i_j| = 0$ if two rows (or columns) are identical

Let us now examine the sum

$$b^{j_1 j_2 \cdots j_n} = \epsilon^{i_1 i_2 \cdots i_n} a^{j_1}_{i_1} a^{j_2}_{i_2} \cdots a^{j_n}_{i_n} \tag{475}$$

If $j_1, j_2, \ldots, j_n$ take on the values $1, 2, \ldots, n$, respectively, we know that (475) reduces to (474) If the $j_1, j_2, \ldots, j_n$ take on the values $1, 2, \ldots, n$, but not respectively, then we have interchanged the rows An even permutation reduces (475) to $|a^i_j|$, and an odd permutation of the j's reduces (475) to $-|a^i_j|$ If two of the j's have the same value, (475) is zero, since if two rows of a determinant are alike it has zero value Hence

$$\epsilon^{i_1 i_2 \cdots i_n} a^{j_1}_{i_1} a^{j_2}_{i_2} \cdots a^{j_n}_{i_n} = |a^i_j| \epsilon^{j_1 j_2 \cdots j_n} \tag{475a}$$

and

$$\epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} a^{i_1}_{j_1} a^{i_2}_{j_2} \cdots a^{i_n}_{j_n} = |a^i_j| \epsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} \tag{475b}$$

Example 115 We now derive the law of multiplication for two determinants of the same order We have

$$\begin{aligned}
|a^i_j|\,|b^i_j| &= |a^i_j| \epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} b^{i_1}_1 b^{i_2}_2 \cdots b^{i_n}_n \\
&= \epsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} a^{j_1}_{i_1} a^{j_2}_{i_2} \cdots a^{j_n}_{i_n} b^{i_1}_1 b^{i_2}_2 \cdots b^{i_n}_n \\
&= \epsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} (a^{j_1}_{i_1} b^{i_1}_1)(a^{j_2}_{i_2} b^{i_2}_2) \cdots (a^{j_n}_{i_n} b^{i_n}_n) \\
&= \epsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} c^{j_1}_1 c^{j_2}_2 \cdots c^{j_n}_n = |c^i_j|
\end{aligned}$$

where

$$\boxed{c^i_j = a^i_\alpha b^\alpha_j} \tag{476}$$

Example 116 We now derive an expansion of a determinant in terms of the cofactors of the elements We have

$$\begin{aligned}
|a^i_j| &= \epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} a^{i_1}_1 a^{i_2}_2 \cdots a^{i_n}_n \\
&= a^{i_1}_1 (\epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} a^{i_2}_2 \cdots a^{i_n}_n) \\
&= a^\alpha_1 A^1_\alpha
\end{aligned}$$

where $A^1_\alpha = \epsilon_{\alpha i_2 \cdots i_n} a^{i_2}_2 \cdots a^{i_n}_n$. A^1_α is called the cofactor of a^α_1 In general,

$$\begin{aligned}
|a^i_j| &= a^\alpha_\beta (\epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} a^{i_1}_1 \cdots a^{i_{\beta-1}}_{\beta-1} \delta^{i_\beta}_\alpha a^{i_{\beta+1}}_{\beta+1} \cdots a^{i_n}_n) \\
&= a^\alpha_\beta A^\beta_\alpha \qquad (\beta \text{ not summed})
\end{aligned}$$

Hence

$$\boxed{a^\alpha_j A^i_\alpha = |a|\,\delta^i_j} \tag{477}$$

Also

$$a^i_\alpha A^\alpha_j = |a|\delta^i_j \tag{477a}$$

Example 117 Let us consider the n linear equations

$$y^i = a^i_\alpha x^\alpha, \quad \alpha, i = 1, 2, \ldots, n \tag{478}$$

Multiplying by A^β_i, we obtain

$$A^\beta_i y^i = a^i_\alpha A^\beta_i x^\alpha$$

so that summing on i, we have from (477)

$$A^\beta_i y^i = |a|\delta^\beta_\alpha x^\alpha = |a| x^\beta$$

If $|a| \neq 0$, then

$$x^\beta = \frac{A^\beta_i y^i}{|a|} = \frac{y^i(\text{cofactor of } a^i_\beta \text{ in } |a|)}{|a|} \tag{479}$$

Example 118 Let $y^i = y^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. In the calculus it is shown that if $\left|\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right| \neq 0$ at a point P and if the partial derivatives are continuous, we can solve for the x^i in terms of the y's, that is, $x^i = x^i(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ in a neighborhood of P

Now we have identically

$$\delta^i_j = \frac{\partial y^i}{\partial y^j} \equiv \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^j}$$

Forming the determinant of both sides,

$$|\delta^i_j| = \left|\frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^j}\right| = \left|\frac{\partial y}{\partial x}\right|\left|\frac{\partial x}{\partial y}\right|$$

from (476). Hence

$$1 \equiv \left|\frac{\partial y}{\partial x}\right|\left|\frac{\partial x}{\partial y}\right|$$

The determinant $\left|\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right|$ is called the Jacobian of the y's with respect to the x's We have shown that

$$J\left(\frac{y^1, y^2, \ldots, y^n}{x^1, x^2, \ldots, x^n}\right) J\left(\frac{x^1, x^2, \ldots, x^n}{y^1, y^2, \ldots, y^n}\right) = 1 \tag{480}$$

Example 119 If the elements of the determinant $|a|$ are functions of the variables $x^1, x^2, \ldots, x^n$, we leave it to the student to prove that

$$\boxed{\frac{\partial|a|}{\partial x^\mu} = A^\alpha_\beta \frac{\partial a^\beta_\alpha}{\partial x^\mu}} \tag{481}$$

As a special case, suppose $a^i_j = \dfrac{\partial y^i}{\partial x^j}$, where $y^i = y^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$. Now $\delta^i_j = \dfrac{\partial y^i}{\partial x^\alpha}\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial y^j}$ Let us consider j to be fixed for the moment. Let $Y^i = \delta^i_j$, $\dfrac{\partial y^i}{\partial x^j} = a^i_j$, $X^i = \dfrac{\partial x^i}{\partial y^j}$, so that $Y^i = a^i_\alpha X^\alpha$ If

$$|a| = \left|\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right| \neq 0$$

then

$$X^\beta = \frac{Y^\alpha(\text{cofactor of } a^\alpha_\beta \text{ in } |a|)}{|a|}$$

from (479), or

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} = \frac{\delta^\alpha_j\left(\text{cofactor of } \dfrac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta} \text{ in } \left|\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|\right)}{\left|\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|}$$

$$= \frac{\left(\text{cofactor of } \dfrac{\partial y^j}{\partial x^\beta} \text{ in } \left|\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|\right)}{\left|\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|}$$

and so

$$\left(\text{cofactor of } \frac{\partial y^j}{\partial x^\beta} \text{ in } \left|\frac{\partial y}{\partial x}\right|\right) \equiv \left|\frac{\partial y}{\partial x}\right| \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}$$

Applying this to (481), we have

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial \left|\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|}{\partial x^\mu} = \left|\frac{\partial y}{\partial x}\right| \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta} \frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^\mu\, \partial x^\alpha} \\ \text{or} \quad & \\ &\frac{\partial \log \left|\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta} \frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^\mu\, \partial x^\alpha}\end{aligned}\right\} \qquad (482)$$

We shall make use of this result later

Example 120 Let $y^i = y^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $\left|\dfrac{\partial y}{\partial x}\right| \neq 0$ We wish to prove that

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial y^k\, \partial y^j} = -\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^j} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^k} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^\beta\, \partial x^\alpha}$$

Now $\delta^i_j = \dfrac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial y^j}$, so that upon differentiating with respect to y^k, we obtain

$$0 = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^k\, \partial y^j} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^j} \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^\beta\, \partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^k} \qquad (483)$$

Multiplying both sides of (483) by $\dfrac{\partial x^\mu}{\partial y^i}$ and summing on i, we obtain

$$0 = \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial y^k\, \partial y^j} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^j} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^k} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^\beta\, \partial x^\alpha} \qquad \text{Q E D}$$

As a special case, if $y = f(x)$, $\dfrac{d^2x}{dy^2} = -\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3 \dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Problems

1 What is the cofactor of each term of $\begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{vmatrix}$?

2 Prove (481), (477)

3 If $|A|$ is the derminant of the cofactors of the determinant $|a|$, show that $|A| = |a|^{n-1}$

4 If $a^i_j = a^j_i$, show that $A^i_j = A^j_i$. Is $|a^i_j| = |a^j_i|$ in all cases?

5 Find an expression for $\dfrac{\partial^3 x^\alpha}{\partial y^i\, \partial y^j\, \partial y^k}$.

6. If $z^i = z^i(y^1, y^2, \ldots, y^n)$, $y^i = y^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, show that $J(z/y)J(y/x) = J(z/x)$

7 If $\bar{g}_{ij} = g_{\alpha\beta} \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \dfrac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j}$, show that $|\bar{g}| = |g| \left|\dfrac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^2$

8 If $\bar{u}^i = u^\alpha \dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha}$, $\bar{v}_i = v_\alpha \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}$, show that $\bar{u}^\alpha \bar{v}_\alpha = u^\alpha v_\alpha$, where $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$

9 If $\bar{u}^i = u^\alpha \dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha}$, show that $u^i = \bar{u}^\alpha \dfrac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\alpha}$.

10 If $\bar{g}_{ij} = g_{\alpha\beta} \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \dfrac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j}$, show that $g_{ij} = \bar{g}_{\alpha\beta} \dfrac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i} \dfrac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^j}$

11 If $\bar{u}^i = u^\alpha \dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha}$, $\bar{\bar{u}}^i = \bar{u}^\alpha \dfrac{\partial \bar{\bar{x}}^i}{\partial \bar{x}^\alpha}$, show that $\bar{\bar{u}}^i = u^\alpha \dfrac{\partial \bar{\bar{x}}^i}{\partial x^\alpha}$

12 Apply (476) for the product of two third-order determinants

13 If $A^i_j = B^\alpha_\beta \dfrac{\partial x^\beta}{\partial y^j} \dfrac{\partial y^i}{\partial x^\alpha}$, show that $A^i_i = B^i_i$, and that $|A| = |B|$, $A^i_j A^j_i = B^i_j B^j_i$.

14 If λ is a root of the equation $|a_{ij} - \lambda b_{ij}| = 0$, show that λ is also a root of $|\bar{a}_{ij} - \lambda \bar{b}_{ij}| = 0$ provided that $\bar{a}_{ij} = a_{\alpha\beta} \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \dfrac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j}$, $\bar{b}_{ij} = b_{\alpha\beta} \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \dfrac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j}$, $\left|\dfrac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right| \neq 0$

122. Arithmetic, or Vector, n-space. In the vector analysis studied in the previous chapters, we set up a coordinate system with three independent variables x, y, z We chose three mutually perpendicular vectors $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, and all other vectors could be written as a linear combination of these three vectors. Any vector could have been represented by the number triple (x, y, z), where we imply that $(x, y, z) \equiv x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. The unit vectors could have been represented by $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, and $(0, 0, 1)$ A system of mathematics could have been derived solely by defining relationships and operations for these triplets, and we need never have introduced a geometrical picture of a vector. For example, two triplets (a, b, c), (α, β, γ) are defined to be equal

if and only if $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma$. We define the scalar product as $(a, b, c)(\alpha, \beta, \gamma) \equiv a\alpha + b\beta + c\gamma$ The vector product, differentiation, etc, can easily be defined. Addition of triples is defined by $(a, b, c) + (\alpha, \beta, \gamma) \equiv (a + \alpha, b + \beta, c + \gamma)$. If A is a real number, then $A(a, b, c)$ is defined as (Aa, Ab, Ac) The set of all triples obeying the rules

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & (a, b, c) + (\alpha, \beta, \gamma) = (a + \alpha, b + \beta, c + \gamma) \\ \text{(ii)} & A(a, b, c) = (Aa, Ab, Ac) \end{array} \tag{484}$$

is called a three-dimensional vector space, or the arithmetic space of three dimensions

It is easy to generalize all this to obtain the arithmetic n-space Elements of this space are of the form $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, the x^i taken as real. In particular, the unit or basic vectors are $(1, 0, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, 0, \ldots, 0, 1)$. We shall designate V_n as the arithmetic n-space.

By a space of n dimensions we mean any set of objects which can be put in one-to-one reciprocal correspondence with the arithmetic n-space We call the correspondence a coordinate system The one-to-one correspondence between the elements or points of the n-space and the arithmetic n-space can be chosen in many ways, and, in general, the choice depends on the nature of the physical problem

Let the point P correspond to the n-tuple $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ We now consider the n equations

$$y^i = y^i(x^1, x^2, \ldots, x^n), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{485}$$

and assume that we can solve for the x^i, so that

$$x^i = x^i(y^1, y^2, \ldots, y^n), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{486}$$

We assume (485) and (486) are single-valued It is at once obvious that the point P can be put into correspondence with the n-tuple $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ The n-space of which P is an element is also in one-to-one correspondence with the set of $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$, so that we have a new coordinate system The point P has not changed, but we have a new method for attaching numbers to the points We call (485) a transformation of coordinates

123. Contravariant Vectors. We consider the arithmetic n-space and define a space curve in this V_n by

$$x^i = x^i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad \alpha \leqq t \leqq \beta \tag{487}$$

Note the immediate generalization from the space curve $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ In our new notation $x = x^1$, $y = x^2$, $z = x^3$

We remember that $\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}$ are the components of a tangent vector to this curve Generalizing, we define a tangent vector to the space curve (487) as having the components

$$\frac{dx^i}{dt}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{488}$$

Now let us consider an allowable (one-to-one and single-valued) coordinate transformation, of the type (485) We immediately have that

$$y^i = y^i(x^1, x^2, \ldots, x^n) = y^i[x^1(t), x^2(t), \ldots, x^n(t)] = y^i(t)$$

as the equation of our space curve for observers using the y coordinate system The components of a tangent vector to the same space curve (remember the points of the curve have not changed; only the labels attached to these points have changed) are given by

$$\frac{dy^i}{dt}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{489}$$

Certainly the x coordinate system is no more important than the y coordinate system We cannot say that $\dfrac{dx^i}{dt}$ is the tangent vector any more than we can say $\dfrac{dy^i}{dt}$ is the tangent vector. If we considered all allowable coordinate transformations, we would obtain the whole class of tangent elements, each element claiming to be the tangent vector for that particular coordinate system. It is the abstract collection of all these elements that is said to be the tangent vector We now ask what relationship exists between the components of the tangent vector in the x coordinate system and the components of the tangent vector in the y coordi-

nate system We can easily answer this question, for

$$\frac{dy^i}{dt} = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{dt} \tag{490}$$

We also notice that $\dfrac{dx^i}{dt} = \dfrac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\dfrac{dy^\alpha}{dt}$. We leave it as an exercise that this result follows from (490) as well as from (486)

We now make the following generalization. Any set of numbers $A^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, which transform according to the law

$$\bar{A}^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n) = A^\alpha(x^1, x^2, \ldots, x^n)\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} \tag{491}$$

under the coordinate transformation $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, are said to be the components of a contravariant vector The vector is not just the set of components in one coordinate system but is rather the abstract quantity which is represented in each coordinate system x by the set of components $A^i(x)$

We immediately see that the law of transformation for a contravariant vector is transitive Let

$$\bar{A}^i = A^\alpha \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha}, \qquad \bar{\bar{A}}^i = \bar{A}^\alpha \frac{\partial \bar{\bar{x}}^i}{\partial \bar{x}^\alpha}$$

Then

$$\bar{\bar{A}}^i = \bar{A}^\beta \frac{\partial \bar{\bar{x}}^i}{\partial \bar{x}^\beta} = A^\alpha \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \bar{\bar{x}}^i}{\partial \bar{x}^\beta} = A^\alpha \frac{\partial \bar{\bar{x}}^i}{\partial x^\alpha}$$

which proves our statement

If the components of a contravariant vector are known in one coordinate system, then the components are known in all other allowable coordinate systems by (491). A coordinate transformation does not give a new vector; it merely changes the components of the same vector. We thus say that a contravariant vector is an invariant under a coordinate transformation An object of any sort which is not changed by transformations of coordinates is called an invariant

Example 121 Let X, Y, Z be the components of a contravariant vector in a Euclidean space, for an orthogonal coordinate

system, and let $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. The components of this vector in a polar coordinate system are

$$R = X\frac{\partial r}{\partial x} + Y\frac{\partial r}{\partial y} + Z\frac{\partial r}{\partial z} = \cos\theta\, X + \sin\theta\, Y$$

$$\Theta = X\frac{\partial \theta}{\partial x} + Y\frac{\partial \theta}{\partial y} + Z\frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{-\sin\theta}{r} X + \frac{\cos\theta}{r} Y$$

$$Z = X\frac{\partial z}{\partial x} + Y\frac{\partial z}{\partial y} + Z\frac{\partial z}{\partial z} = Z$$

where $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$, $\theta = \tan^{-1}(y/x)$, $z = z$.

The components R, Θ, Z are not the projections of the vector $\mathbf{A} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$ on the r, θ, z directions However, if the θ-component is given the dimensions of a length by multiplying by r, we obtain $\Theta r = -\sin\theta\, X + \cos\theta\, Y$, which is the projection of $\mathbf{A}$ in the θ-direction We multiplied by r because $r\,d\theta$ is arc length along the θ-curve R, Θ, Z are the vector components of the vector $\mathbf{A}$ in the r-θ-z coordinate system, whereas R, $r\Theta$, Z are the physical components of the same vector

Problems

1 If $A^i(x)$, $B^i(x)$ are components of two contravariant vectors, show that $C^{ij}(x) = A^i(x)B^j(x)$ transforms according to the law $\bar{C}^{ij} = C^{\alpha\beta}\dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha}\dfrac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\beta}$, where $\bar{C}^{ij} = \bar{A}^i\bar{B}^j$

2 Show that if the components of a contravariant vector vanish in one coordinate system, they vanish in all coordinate systems What can be said of two contravariant vectors whose components are equal in one coordinate system?

3 Show that the sum and difference of two contravariant vectors of order n is another contravariant vector

4 If X, Y, Z are the components of a contravariant vector in an orthogonal coordinate system, find the components in a spherical coordinate system By what must the θ and φ components be multiplied so that we can obtain the projections of the vector on the θ- and φ-directions?

5 If $\bar{A}^i = A^\alpha \dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha}$, show that $A^i = \bar{A}^\alpha \dfrac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\alpha}$.

6 Referring to Prob 1, show that $C^{ij} = \bar{C}^{\alpha\beta} \dfrac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\alpha} \dfrac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^\beta}$

7 If $\bar{A}^i = \left|\dfrac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^N A^\alpha \dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha}$, show that $A^i = \left|\dfrac{\partial \bar{x}}{\partial x}\right|^N \bar{A}^\alpha \dfrac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\alpha}$

124. Covariant Vectors We consider the scalar point function $\varphi = \varphi(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, and form the n-tuple

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x^n}\right) \tag{492}$$

Now under a coordinate transformation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \tag{493}$$

so that the elements of the n-tuple $\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y^1}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial y^2}, \ldots, \dfrac{\partial \varphi}{\partial y^n}\right)$ are related to the elements of (492) by (493) We say that the $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ are the components of a covariant vector, called the gradient of φ More generally, if

$$\boxed{\bar{A}_i = A_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}} \tag{494}$$

the A_i are said to be the components of a covariant vector The remarks of Sec 123 apply here What is the difference between a contravariant and a covariant vector? It is the law of transformation! The reader is asked to compare (494) with (491) We might ask why it was that no such distinction was made in the elementary vector analysis We shall answer this question in a later paragraph

125. Scalar Product of Two Vectors. Let $A^i(x)$ and $B_i(x)$ be the components of a contravariant and a covariant vector We form the scalar $A^\alpha B_\alpha$ What is the form of $A^\alpha B_\alpha$ if we make a coordinate transformation?

Now

$$A^\alpha = \bar{A}^\beta \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\beta}, \qquad B_\alpha = \bar{B}_\sigma \frac{\partial \bar{x}^\sigma}{\partial x^\alpha}$$

so that

$$A^\alpha B_\alpha = \bar{A}^\beta \bar{B}_\sigma \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\beta} \frac{\partial \bar{x}^\sigma}{\partial x^\alpha}$$

$$\begin{aligned} A^\alpha B_\alpha &= \bar{A}^\beta \bar{B}_\sigma \frac{\partial \bar{x}^\sigma}{\partial \bar{x}^\beta} \\ &= \bar{A}^\beta \bar{B}_\sigma \delta^\sigma_\beta \\ &= \bar{A}^\beta \bar{B}_\beta = \bar{A}^\alpha \bar{B}_\alpha \end{aligned}$$

Hence $A^\alpha B_\alpha$ is a scalar invariant under a coordinate transformation The product $(A^\alpha B_\alpha)$ is called the scalar, or dot, product, or inner product, of the two vectors

Problems

1. If A_i and B_i are components of two covariant vectors, show that $C_{ij} = A_i B_j$ transforms according to the law $\bar{C}_{ij} = C_{\alpha\beta} \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \dfrac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j}$

2 Show that $C^i_j = A^i B_j$ transforms according to the law $\bar{C}^i_j = C^\alpha_\beta \dfrac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} \dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha}$

3 If $\bar{A}_i = A_\alpha \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}$ show that $A_i = \bar{A}_\alpha \dfrac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i}$.

4 If φ and ψ are scalar invariants, show that

$$\begin{aligned} \text{grad } (\varphi\psi) &= \varphi \text{ grad } \psi + \psi \text{ grad } \varphi \\ \text{grad } [F(\varphi)] &= F'(\varphi) \text{ grad } \varphi \end{aligned}$$

5 If $A^i B_i$ is a scalar invariant for all contravariant vectors A^i, show that B_i is a covariant vector

126. Tensors. The contravariant and covariant vectors defined above are special cases of differential invariants called tensors The components of the tensor are of the form $T^{a_1 a_2 \cdots a_r}_{b_1 b_2 \cdots b_s}$, where the indices $a_1, a_2, \ldots, a_r, b_1, b_2, \ldots, b_s$ run through the integers $1, 2, \ldots, n$, and the components transform according to the rule

$$\bar{T}^{a_1 a_2 \cdots a_r}_{b_1 b_2 \cdots b_s} = \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^N T^{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_r}_{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_s} \frac{\partial \bar{x}^{a_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{a_r}}{\partial x^{\alpha_r}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \bar{x}^{b_1}} \cdots \frac{\partial x^{\beta_s}}{\partial \bar{x}^{b_s}} \tag{495}$$

We call the exponent N of the Jacobian $\left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|$ the weight of the tensor field If $N = 0$, we say that the tensor field is absolute, otherwise the tensor field is relative of weight N A tensor density occurs for $N = 1$ The vectors of Secs 123 and 124 are absolute tensors of order 1 The tensor of (495) is said to be contravariant of order r and covariant of order s If $s = 0$, the tensor is purely contravariant, and if $r = 0$, purely covariant, otherwise it is called a mixed tensor.

Two tensors are said to be of the same kind if the tensors have the same number of covariant indices and the same number of contravariant indices and are of the same weight We can construct further tensors as follows

(*a*) The sum of two tensors of the same kind is a tensor of this kind The proof is obvious, for if

$$\bar{T}^{a\ \cdots\ b}_{c\ \cdots\ d} = \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^N T^{\alpha\ \cdots\ \beta}_{\sigma\ \cdots\ \tau} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^c} \cdots \frac{\partial x^\tau}{\partial \bar{x}^d} \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^\alpha} \cdots \frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^\beta}$$

$$\bar{S}^{a\ \cdots\ b}_{c\ \cdots\ d} = \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^N S^{\alpha\ \cdots\ \beta}_{\sigma\ \cdots\ \tau} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^c} \cdots \frac{\partial x^\tau}{\partial \bar{x}^d} \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^\alpha} \cdots \frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^\beta}$$

then

$$\bar{U}^{a\ \cdots\ b}_{c\ \cdots\ d} = (\bar{T}^{a\ \cdots\ b}_{c\ \cdots\ d} + \bar{S}^{a\ \cdots\ b}_{c\ \cdots\ d}) = U^{\alpha\ \cdots\ \beta}_{\sigma\ \cdots\ \tau} \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^N \frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^c} \cdots \frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^\beta}$$

(*b*) The product of two tensors is a tensor. We show this for a special case. Let

$$\bar{T}^a_b = \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^2 T^\alpha_\beta \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^b} \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^\alpha}$$

$$\bar{S}^i = \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^3 S^\sigma \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\sigma}$$

so that

$$(\bar{T}^a_b \bar{S}^i) = \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^5 (T^\alpha_\beta S^\sigma) \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^b} \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\sigma}$$

The new tensor is of weight $N + N' = 3 + 2 = 5$

(*c*) *Contraction* Consider the absolute tensor

$$\bar{A}^i_{jk} = A^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha}$$

Replace k by i and sum. We obtain

$$\begin{aligned}\bar{A}^i_{ji} &= A^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} \\ &= A^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^\alpha} = A^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} \delta^\gamma_\alpha \\ &= A^\alpha_{\beta\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j}\end{aligned}$$

so that A^i_{ji} are the components of an absolute contravariant vector In general, we equate a certain covariant index to a contravariant index, sum on the repeated indices, and obtain a new tensor We call this process a contraction

(*d*) *Quotient law* We illustrate the quotient law as follows Assume that $A^i B_{jk}$ is a tensor for all contravariant vectors A^i We prove that B_{jk} is a tensor, for

$$\begin{aligned}\bar{A}^i \bar{B}_{jk} &= A^\alpha B_{\beta\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} \\ &= \bar{A}^i B_{\beta\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^k}\end{aligned}$$

or

$$\bar{A}^i \left(\bar{B}_{jk} - B_{\beta\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^k} \right) = 0$$

Since $\bar{A}^i$ is arbitrary, we must have $\bar{B}_{jk} = B_{\beta\gamma} \dfrac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} \dfrac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^k}$, the desired result

Example 122 The Kronecker delta, δ^i_j, is a mixed absolute tensor, for

$$\delta^i_j \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^i} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^i} = \delta^\beta_\alpha = \bar{\delta}^\beta_\alpha$$

Example 123 If A^i and B_i are the components of a contravariant and a covariant vector, then $C^i_j = A^i B_j$ are the components of a mixed tensor, for

$$\bar{A}^i = A^\alpha \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha}, \qquad \bar{B}_j = B_\beta \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j}$$

so that

$$\bar{C}^i_j = \bar{A}^i\bar{B}_j = A^\alpha B_\beta \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} = C^\alpha_\beta \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j}$$

Example 124 Let g_{ij} be the components of a covariant tensor so that $\bar{g}_{ij} = g_{\alpha\beta}\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}\dfrac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j}$ Taking determinants and applying Example 115 twice, we obtain

$$|\bar{g}| = |g| \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^2 \qquad \text{or} \qquad |\bar{g}|^{\frac{1}{2}} = |g|^{\frac{1}{2}} \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|$$

Now if A^i are the components of an absolute contravariant vector, then $\bar{A}^i = A^\alpha \dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha}$, so that

$$\begin{aligned} \bar{B}^i \equiv |\bar{g}|^{\frac{1}{2}}\bar{A}^i &= \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right| |g|^{\frac{1}{2}} A^\alpha \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} \\ &= \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right| B^\alpha \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} \end{aligned}$$

so that $B^i \equiv |g|^{\frac{1}{2}}A^i$ are the components of a vector density. This method affords a means of changing absolute tensors into relative tensors

Example 125 Assume $g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$ an invariant, that is,

$$\bar{g}_{\alpha\beta}\, d\bar{x}^\alpha\, d\bar{x}^\beta = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$$

Now $d\bar{x}^\alpha = \dfrac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\, dx^\mu$, so that

$$\bar{g}_{\alpha\beta}\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu$$

or

$$\left(\bar{g}_{\alpha\beta}\frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^\nu} - g_{\mu\nu}\right) dx^\mu\, dx^\nu = 0 \tag{496}$$

If we assume $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$, then since (496) is identically zero for arbitrary dx^i, we must have (see Example 114)

$$\boxed{g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^\nu}} \qquad (496a)$$

or the $g_{\mu\nu}$ are components of a covariant tensor of rank 2.

Example 126 If the components of a tensor are zero in one coordinate system, it follows from the law of transformation (495) that the components are zero in all coordinate systems. This is an important result

Example 127 *Outer product of two vectors* Let A_i and B_i be the components of two covariant vectors, so that

$$C_{ij} \equiv A_i B_j = \bar{A}_\alpha \bar{B}_\beta \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^j} = \bar{C}_{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^j}$$

The C_{ij} are the components of a covariant tensor of second order, the outer product of A_i and B_i

Example 128 By the same reasoning as in Example 127, we have that $C_{ij} = A_i B_j - A_j B_i$ are the components of a covariant tensor of the second order Notice that C_{ij} is skew-symmetric, for $C_{ij} = -C_{ji}$ For a three-dimensional space

$$\|C_{ij}\| = \left\| \begin{matrix} 0 & A_1B_2 - A_2B_1 & A_1B_3 - A_3B_1 \\ -(A_1B_2 - A_2B_1) & 0 & A_2B_3 - A_3B_2 \\ -(A_1B_3 - A_3B_1) & -(A_2B_3 - A_3B_2) & 0 \end{matrix} \right\|$$

The nonvanishing terms are similar to the components of the vector cross product

Problems

1 If $\bar{A}_{ij} = A_{\alpha\beta} \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \dfrac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j}$, show that $A_{ij} = \bar{A}_{\alpha\beta} \dfrac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i} \dfrac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^j}$

2 Show that A_{ij} can be written as the sum of a symmetric and a skew-symmetric component

3 If A^i_j are the components of an absolute mixed tensor, show that A^i_i is a scalar invariant.

4 If $A_{\alpha\beta}$ are the components of an absolute covariant tensor, and if $A^{\alpha\beta} A_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma$, show that the $A^{\alpha\beta}$ are the components of an absolute contravariant tensor. The two tensors are said to be reciprocal.

5 If A^{ij} and A_{ij} are reciprocal symmetric tensors, and if u_i are components of a covariant vector, show that $A_{ij}u^iu^j = A^{ij}u_iu_j$, where $u^i = A^{i\alpha}u_\alpha$

6 Let A_{ij} and B_{ij} be symmetric tensors and let u^i, v^i be components of contravariant vectors satisfying

$$\begin{aligned} (A_{ij} - \kappa B_{ij})u^i &= 0 \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \\ (A_{ij} - \kappa' B_{ij})v^i &= 0, \qquad \kappa \neq \kappa' \end{aligned}$$

Prove that $A_{ij}u^iv^j = B_{ij}u^iv^j = 0$, and that $\kappa = \dfrac{A_{ij}u^iu^j}{B_{ij}u^iu^j}$. Why is κ an invariant?

7 From the relative tensor A^i_j of weight N, derive a relative scalar of weight N

8 If A^{ij}_{mn} is a mixed tensor of weight N, show that A^{mj}_{mn} is a mixed tensor of weight N

9 Show that the cofactors of the determinant $|a_{ij}|$ are the components of a relative tensor of weight 2 if a_{ij} is an absolute covariant tensor

10 If A^i are the components of an absolute contravariant vector, show that $\dfrac{\partial A^i}{\partial x^j}$ are *not* the components of a mixed tensor

127. The Line Element. In the Euclidean space of three dimensions we have assumed that

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

In the Euclidean n-space we have

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \cdots + (dx^n)^2 \\ &= \delta_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \end{aligned} \tag{497}$$

If we apply a transformation of coordinates

$$x^i = x^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n)$$

we have that $dx^i = \dfrac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\alpha}\, d\bar{x}^\alpha$, so that (497) takes the form

$$ds^2 = \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu}\, d\bar{x}^\mu\, d\bar{x}^\nu$$

We may write $ds^2 = \bar{g}_{\mu\nu}\, d\bar{x}^\mu\, d\bar{x}^\nu$, where

$$\bar{g}_{\mu\nu} = \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\nu} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\nu}$$

Thus the most general form for the line element $(ds)^2$ for a Euclidean space is the quadratic form

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta \tag{498}$$

The $g_{\alpha\beta}$ are the components of the metric tensor (see Example 125) The quadratic differential form (498) is called a Riemannian metric. Any space characterized by such a metric is called a Riemannian space It does not follow that there exists a coordinate transformation which reduces (498) to a sum of squares If there is a coordinate transformation

$$x^i = x^i(y^1, y^2, \ldots, y^n)$$

such that $ds^2 = \delta_{\alpha\beta}\, dy^\alpha\, dy^\beta$, we say that the Riemannian space is Euclidean The y's will be called the components of a Euclidean coordinate system Notice that $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ Any coordinate system for which the g_{ij} are constants is called a cartesian coordinate system

We can choose the metric tensor symmetric, for

$$g_{ij} \equiv \tfrac{1}{2}(g_{ij} + g_{ji}) + \tfrac{1}{2}(g_{ij} - g_{ji})$$

and the terms $\frac{1}{2}(g_{ij} - g_{ji})\, dx^i\, dx^j$ contribute nothing to the sum ds^2. The terms $\frac{1}{2}(g_{ij} + g_{ji})$ are symmetric in i and j

Example 129 In a three-dimensional Euclidean space $ds^2 = (ax^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$ for an orthogonal coordinate system, so that

$$\|g\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Let

$$\begin{aligned} x^1 &= r \sin\theta \cos\varphi = y^1 \sin y^2 \cos y^3 \\ x^2 &= r \sin\theta \sin\varphi = y^1 \sin y^2 \sin y^3 \\ x^3 &= r \cos\theta = y^1 \cos y^2 \end{aligned}$$

Now

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ij}(r, \theta, \varphi) &= g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} \\ &= \frac{\partial x^1}{\partial y^i} \frac{\partial x^1}{\partial y^j} + \frac{\partial x^2}{\partial y^i} \frac{\partial x^2}{\partial y^j} + \frac{\partial x^3}{\partial y^i} \frac{\partial x^3}{\partial y^j} \end{aligned}$$

Hence

$$\begin{aligned}\bar{g}_{11} &= (\sin y^2 \cos y^3)^2 + (\sin y^2 \sin y^3)^2 + (\cos y^2)^2 \\ &\equiv 1\end{aligned}$$

Similarly

$$\bar{g}_{22} = (y^1)^2, \qquad \bar{g}_{33} = (y^1)^2(\sin y^2)^2, \qquad \bar{g}_{ij} = 0 \quad \text{for } i \neq j$$

so that

$$\begin{aligned}ds^2 &= (dy^1)^2 + (y^1)^2(dy^2)^2 + (y^1 \sin y^2)^2(dy^3)^2 \\ &= dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\,d\varphi^2\end{aligned}$$

is the line element in spherical coordinates Since the g's are not constants, a spherical coordinate system is not a cartesian coordinate system

Example 130 We define g^{ij} as the reciprocal tensor to g_{ij}, that is, $g^{i\alpha}g_{\alpha j} = \delta^i_j$ (see Prob 4, Sec 126) The g^{ij} are the signed minors of the g_{ji} divided by the determinant of the g_{ij} For spherical coordinates in a Euclidean space

$$\|g_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{Vmatrix}, \qquad \|g^{ij}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{Vmatrix}$$

Example 131. We define the length L of a vector A^i in a Riemannian space by the quadratic form

$$\boxed{L^2 = g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta} \tag{499}$$

The *associated vector* of A^i is the covariant vector

$$A_i = g_{i\alpha}A^\alpha$$

It is easily seen that $A^i = g^{i\beta}A_\beta$, so that

$$L^2 = g_{\alpha\beta}g^{\alpha\mu}A_\mu g^{\beta\nu}A_\nu = g^{\mu\nu}A_\mu A_\nu$$

We see that a vector and its associate have the same length If $L^2 \equiv 1$, the vector is a unit vector

Example 132 *Angle between two vectors* Let A^i and B_j be unit vectors We define the cosine of the angle between these

two vectors by

$$\cos\theta = A^iB_i = A^ig_{ij}B^j = g_{ij}A^iB^j$$
$$= g^{ij}A_jB_i = g^{ij}A_iB_j \tag{500}$$

If the vectors are not unit vectors,

$$\cos\theta = \frac{g_{ij}A^iB^j}{(g_{ij}A^iA^j)^{\frac{1}{2}}(g_{ij}B^iB^j)^{\frac{1}{2}}} \tag{500a}$$

If $g_{ij}A^iB^j = 0$, the vectors are orthogonal We must show that $|\cos\theta| \leqq 1$ Consider the vector $\lambda A^i + \mu B^i$ Assuming a positive definite form, that is, $g_{\alpha\beta}z^\alpha z^\beta > 0$ unless $z^i \equiv 0$, we have

$$g_{\alpha\beta}(\lambda A^\alpha + \mu B^\alpha)(\lambda A^\alpha + \mu B^\alpha) > 0$$

or

$$y = \lambda^2(g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta) + 2\lambda\mu(g_{\alpha\beta}A^\alpha B^\beta) + \mu^2(g_{\alpha\beta}B^\alpha B^\beta) > 0$$

This is a quadratic form in λ^2/μ^2, so that the discriminant must be negative, for if it were nonnegative, y would vanish for some value of λ/μ or μ/λ Hence

$$g_{\alpha\beta}A^\alpha B^\beta < (g_{\alpha\beta}A^\alpha A^\beta)^{\frac{1}{2}}(g_{\alpha\beta}B^\alpha B^\beta)^{\frac{1}{2}}$$

or $|\cos\theta| < 1$ Moreover, if $A^i = kB^i$, it is easy to see that $\cos\theta = \pm 1$ Hence $|\cos\theta| \leqq 1$

Example 133 A hypersurface in a Riemannian space is given by $x^i = x^i(u^1, u^2)$ If we keep u^1 fixed, $u^1 = u_0^1$, we obtain the space curve $x^i = x^i(u_0^1, u^2)$, called the u^2 curve Similarly, $x^i = x^i(u^1, u_0^2)$ represents a u^1 curve on the surface These curves are called the coordinate curves of the surface We have at once that on the surface

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta = \sum_{i,j=1}^{2} g_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial u^j}\,du^i\,du^j$$
$$= g_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial u^j}\,du^i\,du^j$$

$$\underline{\overline{ds^2 = h_{ij}\,du^i\,du^j}} \tag{501}$$

where $h_{ij} = g_{\alpha\beta}\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}\dfrac{\partial x^\beta}{\partial u^j}$

Example 134 *The special theory of relativity* Let us consider the one-parameter group of transformations

$$
\begin{aligned}
x &= \beta(\bar{x} - V\bar{t}) \\
y &= \bar{y} \\
z &= \bar{z} \\
t &= \beta\left(\bar{t} - \frac{V}{c^2}\bar{x}\right)
\end{aligned}
\tag{502}
$$

where $\beta = [1 - (V^2/c^2)]^{-\frac{1}{2}}$ and V is the parameter c is the speed of light These are the Einstein-Lorentz transformations (see Prob 11, Sec 24) The transformations form a group because (1) if we set $V = 0$, we obtain the identity transformations $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$, $z = \bar{z}$, $t = \bar{t}$, (2) the inverse transformation exists since $\bar{x} = \beta(x + Vt)$, $\bar{y} = y$, $\bar{z} = z$, $\bar{t} = \beta[t + (V/c^2)x]$, the inverse transformation obtained by replacing the parameter V by $-V$, (3) the result of applying two such transformations yields a new Lorentz transformation, for if

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= \bar{\beta}(\bar{\bar{x}} - W\bar{\bar{t}}) \\
\bar{y} &= \bar{\bar{y}} \\
\bar{z} &= \bar{\bar{z}} \\
\bar{t} &= \bar{\beta}\left(\bar{\bar{t}} - \frac{W}{c^2}\bar{\bar{x}}\right)
\end{aligned}
$$

where $\bar{\beta} = [1 - (W^2/c^2)]^{-\frac{1}{2}}$, then

$$
\begin{aligned}
x &= \bar{\bar{\beta}}(\bar{\bar{x}} - U\bar{\bar{t}}) \\
y &= \bar{\bar{y}} \\
z &= \bar{\bar{z}} \\
t &= \bar{\bar{\beta}}\left(\bar{\bar{t}} - \frac{U}{c^2}\bar{\bar{x}}\right)
\end{aligned}
$$

where

$$
U = \frac{V + W}{1 + (VW/c^2)}, \qquad \bar{\bar{\beta}} = \left(1 - \frac{U^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}
$$

We now assume that (x, y, z, t) represents an event in space and time as observed by S and that $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t})$ represents the same event observed by $\bar{S}$ (see Fig 101)

The origin $\bar{O}$ has $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 0$, so that from (502) $\dfrac{dx}{dt} = -V$, showing that $\bar{S}$ moves with a constant speed $-V$ relative to S Similarly S moves with speed $+V$ relative to $\bar{S}$

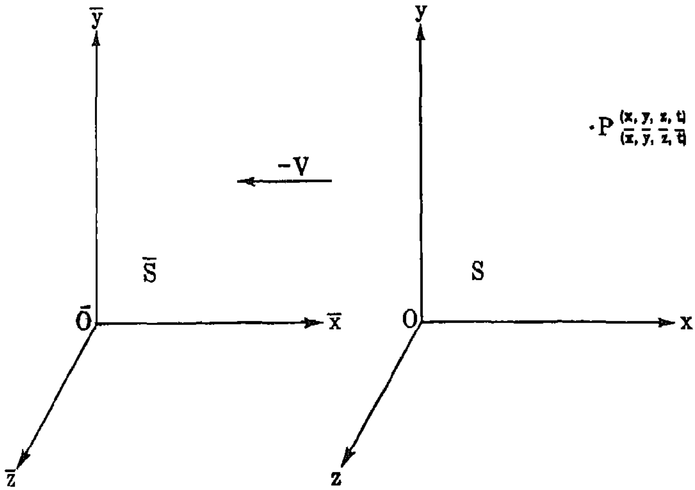

FIG 101

From (502) we see that O and $\bar{O}$ coincide at $t = 0$ At this instant assume that an event is the sending forth of a light wave. The results of Prob 11, Sec 24 show that

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{t^2} = \frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2}{\bar{t}^2} = c^2$$

so that the speed of light is the same for both observers This is one of the postulates of the special theory of relativity Starting with this postulate and desiring the group property, we could have shown that the transformations (502) are the only transformations which keep $dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2 = 0$ an invariant

Let us now consider a clock fixed in the S frame We have $x =$ constant, so that $dx = 0$, and from (502) $dt = \beta\,d\bar{t}$ Hence a unit of time as observed by $\bar{S}$ is not a unit of time as observed by S because of the factor $\beta \neq 1$ S remarks that $\bar{S}$'s clock is running slowly The same is true for clocks fixed in the S frame

We choose for the interval of our four-dimensional space the invariant

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = (dx^4)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$$

where $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, $x^4 = ct$ The interval ds^2 yields two types of measurements, length and time, but takes care to distinguish between them If we keep a clock fixed in the S frame, then $dx = dy = dz = 0$, so that $ds^2 = c^2\,dt^2$, and the measurement of interval ds is real and proportional to the time dt Now if we keep t fixed, $dt = 0$, and

$$ds^2 = -(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

so that ds is a pure imaginary, its absolute value denoting length as measured by meter sticks in a Euclidean space

We shall describe the laws of physics by tensor equations, the components of the tensors subject to the transformations (502) This will guarantee the invariance of our laws of physics.

The momentum of a particle of mass m_0 will be defined by $p^\alpha = m_0\,\dfrac{dx^\alpha}{ds}$. If the speed of the particle is u,

$$u^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

as measured by S, then

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) = (c^2 - u^2)\,dt^2$$

so that

$$p^\alpha = \frac{m_0}{(c^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{dx^\alpha}{dt} = \frac{1}{c}\,\frac{m_0}{[1 - (u^2/c^2)]^{\frac{1}{2}}}\,\frac{dx^\alpha}{dt}$$

and

$$p^4 = \frac{m_0}{[1 - (u^2/c^2)]^{\frac{1}{2}}} = m$$

We define the Minkowski force by the equations

$$\begin{aligned} f^\alpha &= c^2\,\frac{d}{ds}\left(m_0\,\frac{dx^\alpha}{ds}\right) \\ &= \frac{1}{[1 - (u^2/c^2)]^{\frac{1}{2}}}\,\frac{d}{dt}\left(m\,\frac{dx^\alpha}{dt}\right), \qquad \alpha = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

The Minkowski force differs from the Newtonian force by the factor $[1-(u^2/c^2)]^{-\frac{1}{2}}$ The work done by the Newtonian force $F^\alpha = \frac{d}{dt}\left(m\frac{dx^\alpha}{dt}\right)$ for a displacement dx^α is

$$\begin{aligned} dE &= \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{d}{dt}(m\dot{x}^\alpha)\,dx^\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^{3}\left(m\ddot{x}^\alpha\,dx^\alpha + \frac{dm}{dt}\dot{x}^\alpha\,dx^\alpha\right) \\ &= \frac{m_0 u\,du}{[1-(u^2/c^2)]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

and integrating, $E = [1-(u^2/c^2)]^{-\frac{1}{2}}m_0c^2 - m_0c^2 = (m-m_0)c^2$, with $E = 0$ for $u = 0$ Expanding $[1-(u^2/c^2)]^{-\frac{1}{2}}$ in a Maclaurin series, we have $E \approx \frac{1}{2}m_0u^2$ for $(u^2/c^2) \ll 1$

The reader is referred to Probs 1, 2, and 3 of Sec 82 for the application of special relativity theory to electromagnetic theory Let the reader derive (285) by use of this theory, choosing the frame S so that at a particular instant the charge ρ is fixed in this frame The force on the charge as measured by $\bar{S}$ is given by (285)

Problems

1 For paraboloidal coordinates

$$\begin{aligned} x^1 &= y^1y^2\cos y^3 \\ x^2 &= y^1y^2\sin y^3 \\ x^3 &= \tfrac{1}{2}[(y^1)^2 - (y^2)^2] \end{aligned}$$

show that $ds^2 = [(y^1)^2 + (y^2)^2][(dy^1)^2 + (dy^2)^2] + (y^1y^2)^2(dy^3)^2$.

2. Show that for a hypersurface in a three-dimensional Euclidean space, $h_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^j}$.

3 Show that the unit vectors tangent to the u^1 and u^2 curves are given by $\frac{1}{\sqrt{h_{11}}}\frac{\partial x^i}{\partial u^1}$ and $\frac{1}{\sqrt{h_{22}}}\frac{\partial x^i}{\partial u^2}$.

4. If ω is the angle between the coordinate curves, show that $\cos\omega = h_{12}/\sqrt{h_{11}h_{22}}$.

5. $\varphi(x^1, x^2, \quad , x^n) =$ constant determines a hypersurface of a V_n If dx^i is any infinitesimal displacement on the hypersurface, we have $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} dx^\alpha = 0$ Why does this show that the $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ are the components of a covariant vector that is normal to the hypersurface?

6 If $\varphi(x^1, x^2, \ . \ . \ . \ , x^n) =$ constant, show that a unit vector normal to the surface is given by $\left(g^{\sigma\beta} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^\sigma} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^\beta}\right)^{-\frac{1}{2}} g^{r\alpha} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha}$.

7 Consider the vector with components $(dx^1, 0, 0, \quad . \ , 0)$ Under a coordinate transformation the components become $\left(\dfrac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} dx^1, \dfrac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} dx^1, \quad , \dfrac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^1} dx^1\right)$ Consider the new components for the vectors with components $(0, dx^2, \quad . \ , 0), \ . \quad , (0, 0, \ . \ . \ , 0, dx^n)$, and interpret

$$d\bar{x}^1\, d\bar{x}^2 \quad \cdot \ \cdot \ d\bar{x}^n \equiv \left|\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}\right| dx^1\, dx^2 \ \cdot \qquad dx^n$$

Using the result of Prob 7, Sec 121, show that $\sqrt{|g|}\, dx^1\, dx^2 \cdot \quad \cdot dx^n$ is an invariant We define the volume by

$$V = \int\int \ \cdot \ \cdot \ \cdot \int \sqrt{|g|}\, dx^1\, dx^2 \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ dx^n$$

8 Show that $\dfrac{dx^i}{ds}$ is a unit vector for a V_n

9 The surfaces $x^i =$ constant, $i = 1, 2, \ . \ . \ . \ , n$, are called the coordinate surfaces of Riemannian space On these surfaces all variables but one are allowed to vary This determines subspaces of dimensions $(n - 1)$. If we let only x^1 vary, we obtain a coordinate curve Show that the unit vectors to the coordinate curves are given by $a_i = 1/\sqrt{g_{ii}}$, $i = 1, 2, \qquad , n$, and that the angle of intersection between two coordinate curves is given by

$$\cos \omega_{ij} = \frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{ii} g_{jj}}}$$

10 Show that a length observed by $\bar{S}$ appears to be longer as observed by S. How does $\bar{S}$ compare lengths with S?

11. Let j_x, j_y, j_z, ρ be the components of a vector as measured by S. What are the components of the same vector as measured by $\bar{S}$?

12 Let $\frac{d^2\bar{x}}{d\bar{t}^2}, \frac{d^2\bar{y}}{d\bar{t}^2}, \frac{d^2\bar{z}}{d\bar{t}^2}$ be the components of the acceleration of a particle as measured by $\bar{S}$ Find $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ from (502).

128. Geodesics in a Riemannian Space. If a space curve in a Riemannian space is given by $x^i = x^i(t)$, we can compute the distance between two points of the curve by the formula

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \left(g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} \right)^{\frac{1}{2}} dt \tag{503}$$

To find the geodesics we extremalize (503) (see Sec. 40) The differential equations of the geodesics are [see Eq (146)]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0 \tag{504}$$

where $f = (g_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta)^{\frac{1}{2}} = \frac{ds}{dt}$ Now

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{1}{2f}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}\, \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta\right)$$

and

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{g_{\alpha i}\dot{x}^\alpha + g_{i\beta}\dot{x}^\beta}{2\, ds/dt}\right)$$
$$= \frac{1}{2\, ds/dt}\left(g_{\alpha i}\ddot{x}^\alpha + g_{i\beta}\ddot{x}^\beta + \frac{\partial g_{\alpha i}}{\partial x^\beta}\, \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + \frac{\partial g_{i\beta}}{\partial x^\alpha}\, \dot{x}^\beta \dot{x}^\alpha\right)$$
$$- \frac{1}{2(ds/dt)^2}\frac{d^2s}{dt^2}\,(g_{\alpha i}\dot{x}^\alpha + g_{i\beta}\dot{x}^\beta)$$

If we choose s for the parameter t, $s = t$, $\frac{ds}{dt} = 1$, $\frac{d^2s}{dt^2} = 0$, and use the fact that $g_{ij} = g_{ji}$, (504) reduces to

$$g_{i\alpha}\ddot{x}^\alpha + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha i}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{i\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}\right) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0 \tag{505}$$

Multiplying (505) by $g^{\tau i}$ and summing on i, we obtain

$$\ddot{x}^\tau + \frac{g^{\tau i}}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha i}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{i\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}\right)\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = 0$$

or

$$\frac{d^2x^\tau}{ds^2} + \Gamma^\tau_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0 \tag{506}$$

where

$$\Gamma^\tau_{\alpha\beta} = \frac{g^{\tau\sigma}}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\sigma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma}\right) \tag{507}$$

The functions $\Gamma^\tau_{\alpha\beta}$ are called the Christoffel symbols of the second kind Equations (506) are the differential equations of the geodesics or paths

Example 135 For a Euclidean space using orthogonal coordinates, we have $ds^2 = (dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2$, so that $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ and $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 0$. Hence the geodesics are given by $\dfrac{d^2x}{ds^2} = 0$ or $x^\tau = a^\tau s + b^\tau$, a linear path

Example 136. Assume that we live in a space for which $ds^2 = (dx^1)^2 + [(x^1)^2 + c^2](dx^2)^2$, the surface of a right helicoid immersed in a Euclidean three-space We have

$$\|g_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 + c^2 \end{Vmatrix}, \qquad \|g^{ij}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{(x^1)^2 + c^2} \end{Vmatrix}$$

Thus we have

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{11} &= 0, & \Gamma^2_{11} &= 0 \\ \Gamma^1_{21} &= \Gamma^1_{12} = 0, & \Gamma^2_{12} &= \Gamma^2_{21} = \frac{x^1}{(x^1)^2 + c^2} \\ \Gamma^1_{22} &= -x^1, & \Gamma^2_{22} &= 0 \end{aligned}$$

so that the differential equations of the geodesics on the surface are

$$\frac{d^2x^1}{ds^2} - x^1\left(\frac{dx^2}{ds}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2x^2}{ds^2} + \frac{2x^1}{(x^1)^2 + c^2}\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^2}{ds} = 0$$

Problems

1. Derive the Γ^i_{jk} of Example 136

2. Find the differential equations of the geodesics for the line element $ds^2 = (dx^1)^2 + (\sin x^1)^2(dx^2)^2$

3 Show that $\Gamma^\tau_{\alpha\beta} = \Gamma^\tau_{\beta\alpha}$

4 For a Euclidean space using a cartesian coordinate system, show that $\Gamma^\tau_{\alpha\beta} \equiv 0$

5 Obtain the Christoffel symbols and the equations of the geodesics for the surface

$$\begin{aligned} x^1 &= u^1 \cos u^2 \\ x^2 &= u^1 \sin u^2 \\ x^3 &= 0 \end{aligned}$$

This surface is the plane $x^3 = 0$, and the coordinates are polar coordinates

6 From (507) show that $\dfrac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} = g_{\sigma\beta}\Gamma^\sigma_{\alpha\mu} + g_{\sigma\alpha}\Gamma^\sigma_{\beta\mu}$

7 Obtain the Christoffel symbols for a Euclidean space using cylindrical coordinates Set up the equations of the geodesics Do the same for spherical coordinates

8 Write out the explicit form for the Christoffel symbols of the first kind $\{i, jk\} \equiv g_{i\sigma}\Gamma^\sigma_{jk}$

9 Let $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ Calculate $|g|$, g^{ij}, $i, j = 1, 2$. Write out the Γ^i_{jk}.

10. If $\bar{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\dfrac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j}\dfrac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^k}\dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} + \dfrac{\partial^2 x^\sigma}{\partial \bar{x}^j\,\partial \bar{x}^k}\dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\sigma}$, show that $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} - \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}$ are the components of a tensor.

129. Law of Transformation for the Christoffel Symbols. Let the equations of the geodesics be given by

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0 \tag{508}$$

and

$$\frac{d^2\bar{x}^i}{ds^2} + \bar{\Gamma}^i_{jk}\frac{d\bar{x}^j}{ds}\frac{d\bar{x}^k}{ds} = 0 \tag{509}$$

for the two coordinate systems x^i, $\bar{x}^i$ in a Riemannian space We now find the relationship between the Γ^i_{jk} and $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ Now

$$\frac{d\bar{x}^i}{ds} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{ds} \qquad \text{and} \qquad \frac{d^2\bar{x}^i}{ds^2} = \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^\beta\, \partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha}\frac{d^2x^\alpha}{ds^2}$$

Substituting into (509), we obtain

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha}\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^\beta\, \partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} + \bar{\Gamma}^i_{jk}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0 \tag{510}$$

We multiply (510) by $\dfrac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^i}$ and sum on i to obtain

$$\frac{d^2x^\sigma}{dx^2} + \left(\bar{\Gamma}^i_{jk}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^i} + \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^\beta\, \partial x^\alpha}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^i}\right)\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0$$

Comparing with (508), we see that (using the fact that $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$)

$$\boxed{\Gamma^i_{jk} = \bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial \bar{x}^\gamma}{\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\alpha} + \frac{\partial^2 \bar{x}^\sigma}{\partial x^j\, \partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\sigma}} \tag{511}$$

This is the law of transformation for the Γ^i_{jk}. We note that the Γ^i_{jk} are not the components of a tensor, so that the Γ^i_{jk} may be zero in one coordinate system but not in all coordinate systems.

Example 137. From (481) we have

$$\frac{\partial |g|}{\partial x^\mu} = |g| g^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu}$$

and from Prob 6, Sec. 128,

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} = g_{\sigma\beta}\Gamma^\sigma_{\alpha\mu} + g_{\sigma\alpha}\Gamma^\sigma_{\beta\mu}$$

so that

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log |g|}{\partial x^\mu} &= g^{\alpha\beta}g_{\sigma\beta}\Gamma^\sigma_{\alpha\mu} + g^{\alpha\beta}g_{\sigma\alpha}\Gamma^\sigma_{\beta\mu} \\ &= \delta^\alpha_\sigma\Gamma^\sigma_{\alpha\mu} + \delta^\beta_\sigma\Gamma^\sigma_{\beta\mu} \\ &= \Gamma^\alpha_{\alpha\mu} + \Gamma^\beta_{\beta\mu} = 2\Gamma^\alpha_{\alpha\mu} \end{aligned}$$

or

$$\boxed{\frac{\partial \log \sqrt{|g|}}{\partial x^\mu} = \Gamma^\alpha_{\alpha\mu}} \tag{512}$$

Example 138. We may arrive at the Christoffel symbols and their law of transformation by another method Differentiating the law of transformation

$$\bar{g}_{ij} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j}$$

with respect to $\bar{x}^k$, we have

$$\frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} + g_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial \bar{x}^k \, \partial \bar{x}^j} + \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \bar{x}^k \, \partial \bar{x}^i} \right) \quad (513)$$

If we now subtract (513) from the two equations obtained from it by cyclic permutations of the indices i, j, k, we obtain

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \bar{x}^j \, \partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} \quad (511a)$$

where

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{\sigma i} \left(\frac{\partial g_{k\sigma}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j\sigma}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\sigma} \right)$$

Example 139. Let us consider a Euclidean space for which

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \cdots + (dx^n)^2$$

In this case the $\Gamma^i_{jk}(x) = 0$ In any other coordinate system, we have

$$\bar{\Gamma}^i_{jk}(\bar{x}) = \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial \bar{x}^j \, \partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\sigma}$$

If the new coordinate system is also cartesian (the $\bar{g}_{ij}$ = constants), then $\bar{\Gamma}^i_{jk} = 0$, or

$$\frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial \bar{x}^j \, \partial \bar{x}^k} = 0$$

$$x^\sigma = a^\sigma_\alpha \bar{x}^\alpha + b^\sigma \quad (514)$$

where a^σ_α, b^σ are constants of integration.

Hence the coordinate transformation between two cartesian coordinate systems is linear If, furthermore, we desire the distance between two points to be an invariant, we must have

$$\sum_{\sigma=1}^{n} dx^\sigma \, dx^\sigma = \sum_{\sigma=1}^{n} d\bar{x}^\sigma \, d\bar{x}^\sigma = \sum_{\sigma=1}^{n} a^\sigma_\alpha a^\sigma_\beta \, dx^\alpha \, dx^\beta$$

so that

$$\sum_{\sigma=1}^{n} a_\alpha^\sigma a_\beta^\sigma = \delta_{\alpha\beta} \tag{515}$$

A linear transformation such that (515) holds is called an orthogonal transformation

For orthogonal transformations,

$$\bar{g}_{ij} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j}$$

reduces to $\delta_{ij} = \delta_{\alpha\beta} \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \dfrac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j}$. We multiply both sides by $\dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\mu}$ and sum on i, so that

$$\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\mu} = \delta_{\alpha\beta}\, \delta_\mu^\alpha \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} = \delta_{\mu\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \bar{x}^j} \tag{516}$$

Now let us compare the laws of transformation for covariant and contravariant vectors We have

$$\bar{A}^i = A^\alpha \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha}, \qquad \bar{A}_i = A_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \tag{517}$$

Replacing $\dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha}$ by $\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}$ from (516), we see that

$$\bar{A}^i = \sum_{\alpha=1}^{n} A^\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \tag{518}$$

so that orthogonal transformations affect contravariant vectors in exactly the same way that covariant vectors are affected [compare (517) and (518)] This is why there was no distinction made between covariant and contravariant vectors in the elementary treatment of vectors

Problems

1 From (511) show that

$$\bar{\Gamma}_{jk}^i = \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial \bar{x}^j\, \partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\sigma}$$

2 By differentiating the identity $g^{i\alpha}g_{\alpha j} \equiv \delta^i_j$, show that

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^j} = -g^{hk}\Gamma^i_{hj} - g^{hi}\Gamma^k_{hj}$$

3 Derive (513) by performing the permutations

4 If $\dfrac{\partial^2 x^\sigma}{\partial \bar{x}^j\, \partial \bar{x}^k}\dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\sigma} = 0$, show that $\dfrac{\partial^2 x^\sigma}{\partial \bar{x}^j\, \partial \bar{x}^k} = 0$.

5 If

$$\bar{\bar{\Gamma}}^i_{jk} = \bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial \bar{\bar{x}}^j}\frac{\partial \bar{x}^\gamma}{\partial \bar{\bar{x}}^k}\frac{\partial \bar{\bar{x}}^i}{\partial \bar{x}^\alpha} + \frac{\partial^2 \bar{x}^\sigma}{\partial \bar{\bar{x}}^j\, \partial \bar{\bar{x}}^k}\frac{\partial \bar{\bar{x}}^i}{\partial \bar{x}^\sigma}$$

show that

$$\bar{\bar{\Gamma}}^i_{jk} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{\bar{x}}^j}\frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{\bar{x}}^k}\frac{\partial \bar{\bar{x}}^i}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial \bar{\bar{x}}^j\, \partial \bar{\bar{x}}^k}\frac{\partial \bar{\bar{x}}^i}{\partial x^\sigma}$$

6 If $x^\alpha = x^\alpha(u^1, u^2, \ldots, u^r)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, $r < n$, and if $h_{ij} = g_{\alpha\beta}\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}\dfrac{\partial x^\beta}{\partial u^j}$, and if

$$(\Gamma^i_{jk})_h = \frac{1}{2}h^{i\sigma}\left(\frac{\partial h_{\sigma j}}{\partial u^k} + \frac{\partial h_{k\sigma}}{\partial u^j} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial u^\sigma}\right)$$

show that

$$h_{\lambda i}(\Gamma^\lambda_{jk})_h = g_{\alpha\mu}(\Gamma^\mu_{\beta\gamma})_g\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial u^j}\frac{\partial x^\gamma}{\partial u^k} + g_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial u^j\, \partial u^k}$$

7 Define $\bar{g}_{\alpha\beta}(x)$ by the equation $\bar{g}_{\alpha\beta}(x) \equiv \mu(x)g_{\alpha\beta}(x)$ We see that the metric tensor $g_{\alpha\beta}(x)$ is determined only up to a factor of multiplication $\mu(x)$ In this space (conformal) we do not compare lengths at two different points, or, in other words, the unit of length changes from point to point. Show that

$$\bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}(x) = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x) + \varphi_\gamma\delta^\alpha_\beta + \varphi_\beta\delta^\alpha_\gamma - g^{\alpha\sigma}g_{\beta\gamma}\varphi_\sigma$$

where $\varphi_\sigma = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \log \mu}{\partial x^\sigma}$. $\bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma}$ and $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ are defined by (507) using $\bar{g}_{\alpha\beta}$ and $g_{\alpha\beta}$

8 Prove that a geodesic of zero length (minimal geodesic) [that is, $x^\alpha(s)$ satisfies (506) and $g_{\alpha\beta}\dfrac{dx^\alpha}{ds}\dfrac{dx^\beta}{ds} = 0$] remains a minimal geodesic under a conformal transformation.

130. Covariant Differentiation. Let us differentiate the absolute covariant vector given by the transformation

$$\bar{A}_i = A_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}$$

We obtain

$$\frac{\partial \bar{A}_i}{\partial \bar{x}^j} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} + A_\alpha \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \bar{x}^j \, \partial \bar{x}^i} \tag{519}$$

It is at once apparent that $\dfrac{\partial A_i}{\partial x^j}$ are not the components of a tensor However, we can construct a tensor by the following device. From (511a) (see page 292)

$$\bar{\Gamma}^\alpha_{ij} = \Gamma^\rho_{\sigma\tau} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\tau}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\rho} + \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial \bar{x}^i \, \partial \bar{x}^j} \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\sigma} \tag{520}$$

Multiplying (520) by $\bar{A}_\alpha$ and subtracting from (519), we obtain

$$\frac{\partial \bar{A}_i}{\partial \bar{x}^j} - \bar{A}_\alpha \bar{\Gamma}^\alpha_{ij} = \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - A_\rho \Gamma^\rho_{\alpha\beta} \right) \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} \tag{521}$$

so that if we define

$$\boxed{\bar{A}_{i,j} \equiv \frac{\partial \bar{A}_i}{\partial \bar{x}^j} - \bar{A}_\alpha \bar{\Gamma}^\alpha_{ij}} \tag{522}$$

we have that

$$\bar{A}_{i,j} = A_{\alpha,\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j}$$

and $A_{i,j}$ is a covariant tensor of rank 2 The tensor is called the covariant derivative of A_i with respect to x^j The comma will denote covariant differentiation For a cartesian coordinate system, $\Gamma^i_{jk} = 0$, so that $A_{i,j} = \dfrac{\partial A_i}{\partial x^j}$, our ordinary derivative

For a scalar of weight N we have

$$\bar{A} = \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^N A$$

so that

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{x}^j} = \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^N \frac{\partial A}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^j} + N\left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^{N-1} \frac{\partial \left|\dfrac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|}{\partial \bar{x}^j} A$$

and from (482), $\dfrac{\partial \left|\dfrac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|}{\partial \bar{x}^j} = \left|\dfrac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right| \dfrac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\beta}\dfrac{\partial^2 x^\beta}{\partial \bar{x}^j\,\partial \bar{x}^\alpha}$ Hence

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{x}^j} = \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^N \frac{\partial A}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^j} + N\left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^N \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial \bar{x}^j\,\partial \bar{x}^\alpha} A \tag{523}$$

Multiplying $\bar{\Gamma}^\alpha_{j\alpha} = \Gamma^\sigma_{\alpha\sigma}\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^j} + \dfrac{\partial^2 x^\sigma}{\partial \bar{x}^\alpha\,\partial \bar{x}^j}\dfrac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^\sigma}$ by $N\bar{A}$ and subtracting from (523), we have

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial \bar{x}^j} - N\bar{A}\bar{\Gamma}^\alpha_{j\alpha} = \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^N \left(\frac{\partial A}{\partial x^\alpha} - NA\Gamma^\sigma_{\alpha\sigma}\right)\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^j} \tag{524}$$

Hence $A_{,j} \equiv \dfrac{\partial A}{\partial x^j} - NA\Gamma^\sigma_{j\sigma}$ is a relative covariant vector of weight N It is called the covariant derivative of the relative scalar A For a cartesian coordinate system it reduces to the ordinary derivative

In general, it can be proved that if $T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_s}$ is a relative tensor of weight N, then

$$\begin{aligned} T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_s,m} \equiv{} & \frac{\partial T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_s}}{\partial x^m} + T^{\mu\alpha_2\cdots\alpha_r}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_s}\Gamma^{\alpha_1}_{\mu m} + \cdots + T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\mu}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_s}\Gamma^{\alpha_r}_{\mu m} \\ & - T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r}_{\mu\beta_2\cdots\beta_s}\Gamma^\mu_{\beta_1 m} - \cdots - T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r}_{\beta_1\beta_2\cdots\mu}\Gamma^\mu_{\beta_s m} \\ & - NT^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r}_{\beta_2\beta_2\cdots\beta_s}\Gamma^\mu_{\mu m} \end{aligned} \tag{525}$$

is a relative tensor of weight N, of covariant order one greater than $T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_s}$, and it is called the covariant derivative of $T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_s}$.

Example 140. We have

$$g_{ij,k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - g_{\mu j}\Gamma^\mu_{ik} - g_{i\mu}\Gamma^\mu_{jk}$$

so that from Prob 6, Sec 128,

$$g_{ij,k} = 0 \tag{526}$$

Example 141. If φ is an absolute scalar, $\varphi = \bar{\varphi}$, we call $\varphi_{,j} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^j}$ the gradient of φ

Example 142 *Curl of a vector* Let A_i be an absolute covariant vector We have $A_{i,j} = \dfrac{\partial A_i}{\partial x^j} - A_\alpha \Gamma^\alpha_{ij}$ Similarly,

$$A_{j,i} = \frac{\partial A_j}{\partial x^i} - A_\alpha \Gamma^\alpha_{ji}$$

Hence $A_{i,j} - A_{j,i} \equiv \dfrac{\partial A_i}{\partial x_j} - \dfrac{\partial A_j}{\partial x^i}$ is a covariant tensor of rank 2 It is called the curl of the vector A_i If the A_i are the components of the gradient of a scalar, $A_i = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x^i}$, then

$$\text{curl } A_i = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j\, \partial x^i} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j\, \partial x^i} = 0$$

so that the curl of a gradient is zero It can be shown that the converse holds If the curl is identically zero, the covariant vector is the gradient of a scalar

Example 143 *Intrinsic derivatives* Since $A_{i,j}$ and $\dfrac{dx^j}{ds}$ are tensors, we know that $A_{i,j}\dfrac{dx^j}{ds}$ is a covariant vector We call it the intrinsic derivative of A_i We have

$$A_{i,j}\frac{dx^j}{ds} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j}\frac{dx^j}{ds} - A_\alpha \Gamma^\alpha_{ij}\frac{dx^j}{ds}$$

$$\boxed{\frac{\delta A_i}{\delta s} \equiv \frac{dA_i}{ds} - A_\alpha \Gamma^\alpha_{ij}\frac{dx^j}{ds}} \tag{527}$$

and write the intrinsic derivative of A_i as $\dfrac{\delta A_i}{\delta s}$

Example 144 The divergence of an absolute contravariant vector is defined as the contraction of its covariant derivative

Hence

$$\operatorname{div} A^i = A^\alpha_{,\alpha} = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\alpha} + A^\alpha \Gamma^i_{\alpha i}$$

Now $\Gamma^i_{\alpha i} = \dfrac{\partial \log \sqrt{|g|}}{\partial x^\alpha}$ from (512), so that

$$\operatorname{div} A^i = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial \sqrt{|g|}}{\partial x^\alpha} A^\alpha$$

$$\operatorname{div} A^i = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{|g|}\, A^\alpha) \tag{528}$$

In spherical coordinates, we have

$$\sqrt{|g|} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} = r^2 \sin \theta$$

so that

$$\operatorname{div} A^i = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta\, A^r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r^2 \sin \theta\, A^\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r^2 \sin \theta\, A^\varphi) \right]$$

and changing A^θ and A^φ into physical components having the dimensions of A^r (see Example 121), we have

$$\operatorname{div} A^i = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta\, A^r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta\, A^\theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r A^\varphi) \right]$$

Example 145. *The Laplacian of a scalar invariant* If φ is a scalar invariant, $\varphi_{,j}$ is the gradient of φ, and the div $(\varphi_{,j})$ is called the Laplacian of φ

$$\operatorname{Lap} \varphi = \nabla^2 \varphi = \operatorname{div} (\varphi_{,j}) = \operatorname{div} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}$$

Thus

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sqrt{|g|}\, g^{\alpha j} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right) \tag{529}$$

We changed $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^j}$ into a contravariant vector so that we could apply (528) The associate of $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^j}$ is $g^{\alpha j}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x^j}$.

In spherical coordinates

$$|g_{ij}|^{\frac{1}{2}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}, \qquad |g^{ij}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{r^2 \sin\theta} \end{vmatrix}$$

so that

$$\nabla^2 F = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sin\theta \frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial F}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right)\right]$$

Example 146 In Example 144 we defined the divergence of the vector A^i as $\operatorname{div} A^i = A^{\alpha}_{,\alpha} = \dfrac{\partial A^\alpha}{\partial x^\alpha} + A^\alpha \Gamma^i_{\alpha i}$. For a Euclidean space using cartesian coordinates, the $\Gamma^i_{jk} = 0$, so that

$$\operatorname{div} A^i = \frac{\partial A^1}{\partial x^1} + \frac{\partial A^2}{\partial x^2} + \cdots + \frac{\partial A^n}{\partial x^n}$$

The quantity $A^{\alpha}_{,\alpha}$ is a scalar invariant If we let N_i be the components of the unit normal vector to the surface $d\sigma$, then $A^\alpha N_\alpha$ is also an invariant In cartesian coordinates the divergence theorem is

$$\iiint_R \operatorname{div} \mathbf{A}\, d\tau = \iint_S \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{N}\, d\sigma$$

In tensor form it becomes

$$\iiint_R A^{\alpha}_{,\alpha}\, d\tau = \iint_S A^\alpha N_\alpha\, d\sigma \tag{530}$$

We can obtain Green's formula by considering the covariant vectors $\varphi_{,i}$ and $\psi_{,i}$. Now let

$$A_i = \psi\varphi_{,i} - \varphi\psi_{,i}$$

The associated vector of A_i is $A^\alpha = g^{\alpha i}A_i = g^{\alpha i}(\psi\varphi_{,i} - \varphi\psi_{,i})$ We easily see that $A^\alpha_{,\alpha} = g^{\alpha i}(\psi\varphi_{,i\alpha} - \varphi\psi_{,i\alpha})$. Now $g^{\alpha i}\varphi_{,i\alpha}$ is an invariant and in cartesian coordinates reduces to

$$\frac{\partial^2\varphi}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2\varphi}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2\varphi}{(\partial x^3)^2} = \text{Lap } \varphi$$

Hence, using (530), we obtain

$$\iiint_R (\psi \text{ Lap } \varphi - \varphi \text{ Lap } \psi)\, d\tau = \iint_S g^{\alpha i}A_iN_\alpha\, d\sigma$$
$$= \iint_S (\psi\varphi_{,i} - \varphi\psi_{,i})N^i\, d\sigma$$

Example 147 Let us consider the covariant vector F_α We multiply it by the contravariant vector dx^α and sum on α to obtain the invariant $F_\alpha\, dx^\alpha = F_\alpha \dfrac{dx^\alpha}{ds}\, ds$, which reduces to $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{r}$ in cartesian coordinates In Example 142 we constructed the curl of a vector, which turned out to be a tensor of rank 2 We now construct a vector whose components will also be those of the curl of a vector We know that $F_{\alpha,\beta}$ is a tensor. Now define $\epsilon^{\alpha\beta\gamma} = \dfrac{1}{\sqrt{|g|}}$ if α, β, γ is an even permutation of 1, 2, 3; $\epsilon^{\alpha\beta\gamma} = -\dfrac{1}{\sqrt{|g|}}$ if α, β, γ, is an odd permutation of 1, 2, 3; $\epsilon^{\alpha\beta\gamma} = 0$ otherwise Thus

$$\epsilon^{123} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}, \qquad \epsilon^{231} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}, \qquad \epsilon^{132} = -\frac{1}{\sqrt{|g|}}, \qquad \epsilon^{112} = 0$$

We obtain a new invariant

$$G^\gamma = -\epsilon^{\alpha\beta\gamma}F_{\alpha,\beta}$$

In cartesian coordinates $F_{\alpha,\beta} = \dfrac{\partial F_\alpha}{\partial x^\beta}$, and

$$G^1 = -\epsilon^{\alpha\beta 1}F_{\alpha,\beta} = -[\epsilon^{231}F_{2,3} + \epsilon^{321}F_{3,2}] = \frac{\partial F_3}{\partial x^2} - \frac{\partial F_2}{\partial x^3}$$

and similarly for G^2 and G^3 Hence Stokes's theorem in tensor form reads

$$\int_\Gamma F_\alpha \frac{dx^\alpha}{ds}\, ds = \int\!\!\int_S -\epsilon^{\alpha\beta\gamma} F_{\alpha,\beta} N_\gamma \, d\sigma \tag{531}$$

Problems

1 By starting with $\bar{A}^i = A^\alpha \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha}$, show that

$$A^i_{,j} \equiv \frac{\partial A^i}{\partial x^j} + A^\alpha \Gamma^i_{\alpha j}$$

is a mixed tensor

2 Prove that $(g_{i\alpha} A^\alpha)_{,j} = g_{i\alpha} A^\alpha_{,j}$

3 Prove that $(A^\alpha B_\alpha)_{,j} = A^\alpha B_{\alpha,j} + A^\alpha_{,j} B_\alpha$

4 Prove that $|g|_{,j} = 0$

5 Use (529) to find the Laplacian of F in cylindrical coordinates

6 Prove that $\delta^i_{j,k} = 0$

7 Prove that $\dfrac{1}{\sqrt{|g|}} \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{|g|}\, g^{i\alpha}) + \Gamma^i_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = 0.$

8. As in Example 143, show that the intrinsic derivative $\dfrac{\delta A^i}{\delta s} \equiv \dfrac{dA^i}{ds} + A^\alpha \Gamma^i_{\alpha\beta} \dfrac{dx^\beta}{ds}$ is a contravariant vector.

9 Show that the intrinsic derivative of a scalar of weight N is $\dfrac{\delta A}{\delta s} = \dfrac{dA}{ds} - NA\Gamma^\sigma_{j\sigma} \dfrac{dx^j}{ds}$, so that if A is an absolute constant, $\dfrac{\delta A}{\delta s} = 0$

10. Show that $(g_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta)_{,j} = g_{\alpha\beta} A^\alpha_{,j} A^\beta + g_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta_{,j}$.

11 Show that $A^r_{s,t} \equiv \dfrac{\partial A^r_s}{\partial x^t} + \Gamma^r_{\mu t} A^\mu_s - \Gamma^\mu_{st} A^r_\mu$ for an absolute mixed tensor A^r_s

12 Show that $\nabla^2(\varphi\psi) = \varphi\,\nabla^2\psi + 2\,\nabla\varphi \cdot \nabla\psi + \psi\,\nabla^2\varphi$

13 Show that $A^\alpha_{i,\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{|g|}} \dfrac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{|g|}\, A^\alpha_i) - A^\alpha_\beta \Gamma^\beta_{i\alpha}$.

14. If $A_i = A_i(x, t)$ is a covariant vector, show that

$$\frac{\delta A_i}{\delta t} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + A_{i,j}\frac{dx^j}{dt}$$

and hence that the acceleration $f_i \equiv \dfrac{\delta v_i}{\delta t} = \dfrac{\partial v_i}{\partial t} + v_{i,j}v^j$

15. Let λ_α be an arbitrary vector whose covariant derivative vanishes; that is, $\lambda_{\alpha,\beta} = 0$. Consider $\iint_S T^{\alpha\beta}\lambda_\alpha N_\beta\, d\sigma$, and apply the divergence theorem to the vector $T^{\alpha\beta}\lambda_\alpha$ Hence show that

$$\iint_S T^{\alpha\beta}N_\beta\, d\sigma = \iiint_R T^{\alpha\beta}_{,\beta}\, d\tau$$

16. Let s_i be the displacement vector of any particle from its position of equilibrium (see Sec 115). We know that $s_{i,j}$ is a covariant tensor. The relative displacements of the particles are given by

$$\begin{aligned}\delta s_i &= s_{i,j}\, dx \\ &= \tfrac{1}{2}(s_{i,j} + s_{j,i})\, dx^j + \tfrac{1}{2}(s_{i,j} - s_{j,i})\, dx^j\end{aligned}$$

Show that the term $\frac{1}{2}(s_{i,j} - s_{j,i})\, dx^j$ represents a rotation

We define the symmetric strain tensor E_{ij} by the equation

$$E_{ij} = \tfrac{1}{2}(s_{i,j} + s_{j,i})$$

The stress tensor T_{ij} is defined by the equations

$$\Delta F_i = T_{ij}N^j\,\Delta\sigma$$

where ΔF_i is the force acting on the element of area $\Delta\sigma$ with normal vector N^j (see Sec 116)

Let f_r be the acceleration of the volume $d\tau$ and F_r be the force per unit mass acting on the mass in question Show that

$$\iiint_R \rho F_r\, d\tau + \iint_S T_{rj}N^j\, d\sigma = \iiint_R \rho f_r\, d\tau$$

or using contravariant components,

$$\iiint_R \rho F^r\, d\tau + \iint_S T^{rj}N_j\, d\sigma = \iiint_R \rho f^r\, d\tau$$

Now deduce the equations of motion

$$\rho F^r + T^{rj}_{\ ,j} = \rho f^r$$

If $T^{rj} = pg^{rj}$, show that

$$\rho F^r - p_{,j} g^{rj} = \rho f^r$$

or

$$\rho F_r - p_{,r} = \rho f_r \qquad \text{[see (411)]}$$

131. Geodesic Coordinates. The equations of the geodesics are given by

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0$$

where the Γ^i_{jk} transform according to the law

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \bar{x}^j \, \partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} \tag{532}$$

We ask ourselves the following question If the Γ^i_{jk} are different from zero at a point $x^i = q^i$, can we find a coordinate system such that $\bar{\Gamma}^i_{jk} = 0$ at the corresponding point? The answer is "Yes"!

Let

$$\bar{x}^i = (x^i - q^i) + \tfrac{1}{2}(\Gamma^i_{\alpha\beta})_q (x^\alpha - q^\alpha)(x^\beta - q^\beta) \tag{533}$$

so that $\left.\dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\right|_q = \delta^i_j$ and $\left|\dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\right|_q = 1$, and moreover the transformation (533) is nonsingular The point $x^i = q^i$ corresponds to the point $\bar{x}^i = 0$

Now differentiating (533) with respect to $\bar{x}^j$, we obtain

$$\delta^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} + (\Gamma^i_{\alpha\beta})_q (x^\alpha - q^\alpha) \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} \tag{534}$$

because of the symmetry of $\Gamma^i_{\alpha\beta}$ Hence $\left.\dfrac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\right|_q = \delta^i_j$

Differentiating (534) with respect to $\bar{x}^k$, we obtain

$$0 = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^k \, \partial \bar{x}^j} + (\Gamma^i_{\alpha\beta})_q \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j} + (\Gamma^i_{\alpha\beta})_q (x^\alpha - q^\alpha) \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial \bar{x}^k \, \partial \bar{x}^j}$$

so that

$$\left.\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^k \, \partial \bar{x}^j}\right|_q = -(\Gamma^i_{\alpha\beta})_q \left.\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^k}\right|_q \left.\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^j}\right|_q$$
$$= -(\Gamma^i_{\alpha\beta})_q \delta^\alpha_k \delta^\beta_j = -(\Gamma^i_{jk})_q$$

Substituting into (532), we obtain

$$(\bar{\Gamma}^i_{jk})_0 = (\Gamma^\alpha_{\beta\gamma})_q \delta^\beta_j \delta^\gamma_k \delta^i_\alpha - (\Gamma^\alpha_{jk})_q \delta^i_\alpha$$
$$= (\Gamma^i_{jk})_q - (\Gamma^i_{jk})_q = 0, \qquad \text{Q E D}$$

Any system of coordinates for which $(\Gamma^i_{jk})_P = 0$ at a point P is called a geodesic coordinate system In such a system, the covariant derivative, when evaluated at the origin, becomes the ordinary derivative evaluated at the origin For example,

$$(A^i_{,j})_O = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^j}\right)_O + (\Gamma^i_{\alpha j})_O (A^\alpha)_O = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^j}\right)_O$$

since $\Gamma^i_{\alpha j} = 0$ at the origin

The covariant derivative of a sum or product of tensors must obey the same rules that hold for ordinary derivatives of the calculus, for at any point we can choose geodesic coordinates so that

$$A^i_{,j} + B^i_{,j} = \frac{\partial A^i}{\partial x^j} + \frac{\partial B^i}{\partial x^j} = \frac{\partial (A^i + B^i)}{\partial x^j} = (A^i + B^i)_{,j}$$

and $A^i_{,j} + B^i_{,j} - (A^i + B^i)_{,j}$ is a zero tensor for geodesic coordinates Hence $A^i_{,j} + B^i_{,j} - (A^i + B^i)_{,j}$ is zero in all coordinate systems, so that

$$A^i_{,j} + B^i_{,j} \equiv (A^i + B^i)_{,j}$$

We leave it as an exercise for the reader to prove that

$$(A^i B_j)_{,k} = A^i_{,k} B_j + A^i B_{j,k}$$

Equation (533) yields one geodesic coordinate system There are infinitely many such systems, since we could have added $\varphi_{\alpha\beta\gamma}(x)(x^\alpha - q^\alpha)(x^\beta - q^\beta)(x^\gamma - q^\gamma)$ to the right-hand side of (533) and still have obtained $(\bar{\Gamma}^i_{jk})_0 = 0$

A special type of geodesic coordinate is the following Let $x^i = x^i(s)$ be a geodesic passing through the point P, $x^i = x^i_0$, and

let $\xi^i = \left.\frac{dx^i}{ds}\right|_P$. Define

$$\bar{x}^i = \xi^i s \tag{535}$$

where s is arc length along the geodesic. Each ξ^i determines a geodesic through P, and s determines a point on this geodesic Hence every point in the neighborhood of P has the definite coordinate $\bar{x}^i$ attached to it. The equations of the geodesics in this coordinate system are

$$\frac{d^2\bar{x}^i}{ds^2} + \bar{\Gamma}^i_{jk}\frac{d\bar{x}^j}{ds}\frac{d\bar{x}^k}{ds} = 0$$

But $\frac{d\bar{x}^i}{ds} = \xi^i$ and $\frac{d^2\bar{x}^i}{ds^2} = 0$, so that

$$\bar{\Gamma}^i_{jk}\xi^j\xi^k = 0 \tag{536}$$

Since this equation holds at the point P for all directions ξ^i, we must have $\bar{\Gamma}^i_{jk} + \bar{\Gamma}^i_{kj} = 2\bar{\Gamma}^i_{jk} = 0$, so that the $\bar{x}^i$ are geodesic coordinates The $\bar{x}^i = \xi^i s$ are called Riemannian coordinates.

Example 148. If ξ^i is a unit vector, we have

$$g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta \equiv 1$$

The intrinsic derivative is

$$g_{\alpha\beta}\frac{\delta\xi^\alpha}{\delta s}\xi^\beta + g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\frac{\delta\xi^\beta}{\delta s} = 0$$

since $(g_{\alpha\beta})_{,j} = 0$ (see Example 140) Hence $g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\frac{\delta\xi^\beta}{\delta s} = 0$, and

$g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\left(\frac{d\xi^\beta}{ds} + \xi^\mu\Gamma^\beta_{\mu\sigma}\frac{dx^\sigma}{ds}\right) = 0$ We see that the vector

$$\frac{d\xi^i}{ds} + \Gamma^i_{\mu\sigma}\xi^\mu\frac{dx^\sigma}{ds}$$

is normal to the vector ξ^i

Problems

1 Show that $g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}$ remains constant along a geodesic.

2. Show that for normal coordinates $\bar{x}^i$, $\bar{\Gamma}^i_{jk}\bar{x}^j\bar{x}^k = 0$.

3 If s is arc length of the curve C, show that the intrinsic derivative of the unit tangent $\dfrac{dx^i}{ds}$ in the direction of the curve has the components

$$p^i = \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}$$

What are the components for a geodesic?

4. Prove that $\dfrac{\delta}{\delta t}(X^\alpha Y_\alpha) = \dfrac{\delta X^\alpha}{\delta t} Y_\alpha + X^\alpha \dfrac{\delta Y_\alpha}{\delta t}$

132. The Curvature Tensor. Let us consider the absolute contravariant vector V^i Its covariant derivative yields the mixed tensor

$$V^i_{,j} = \frac{\partial V^i}{\partial x_j} + V^\alpha \Gamma^i_{\alpha j}$$

On again differentiating covariantly, we obtain

$$\begin{aligned} V^i_{,jk} &= \frac{\partial V^i_{,j}}{\partial x^k} + V^\alpha_{,j}\Gamma^i_{\alpha k} - V^i_{,\alpha}\Gamma^\alpha_{jk} \\ &= \frac{\partial^2 V^i}{\partial x^k\,\partial x^j} + \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^k}\Gamma^i_{\alpha j} + V^\alpha \frac{\partial \Gamma^i_{\alpha j}}{\partial x^k} + \left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^j} + V^\beta \Gamma^\alpha_{\beta j}\right)\Gamma^i_{\alpha k} \\ &\qquad - \left(\frac{\partial V^i}{\partial x^\alpha} + V^\beta \Gamma^i_{\beta\alpha}\right)\Gamma^\alpha_{jk} \end{aligned}$$

Interchanging k and j and subtracting, we have

$$V^i_{,jk} - V^i_{,kj} = V^\alpha B^i_{\alpha jk} \tag{537}$$

where

$$B^i_{\alpha jk} = \frac{\partial \Gamma^i_{\alpha j}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{\alpha k}}{\partial x^j} + \Gamma^\beta_{\alpha j}\Gamma^i_{\beta k} - \Gamma^\beta_{\alpha k}\Gamma^i_{\beta j} \tag{538}$$

Since $V^i_{,jk} - V^i_{,kj}$ and V^i are tensors, $V^i_{\alpha jk}$ must be the components of a tensor, from the quotient law (Sec 126). It is called the curvature tensor. We can obtain two new tensors of the second order by contraction.

Let

$$R_{ij} = B^{\alpha}_{i\alpha j} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{i\alpha}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{ij}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\beta}_{i\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta j} - \Gamma^{\beta}_{ij}\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} \tag{539}$$

This tensor is called the Ricci tensor and plays an important role in the theory of relativity

We obtain another tensor by defining

$$S_{ij} = B^{\alpha}_{\alpha ij} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\alpha i}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\alpha j}}{\partial x^i} \tag{540}$$

Evidently $S_{ij} = -S_{ji}$, and if we use the fact that

$$\frac{\partial \log \sqrt{|g|}}{\partial x^{\mu}} = \Gamma^{\alpha}_{\alpha\mu},$$

we have that

$$S_{ij} = \frac{\partial^2 \log \sqrt{|g|}}{\partial x^i \, \partial x^j} - \frac{\partial^2 \log \sqrt{|g|}}{\partial x^j \, \partial x^i} \equiv 0$$

Now $R_{ij} - R_{ji} = S_{ij} = 0$, so that the Ricci tensor is symmetric in its indices. We could have deduced this fact by examining (539) directly

The invariant $R = g^{ij}R_{ij}$ is called the *scalar curvature*

133. Riemann-Christoffel Tensor. The tensor

$$R_{hijk} = g_{h\alpha}B^{\alpha}_{ijk} \tag{541}$$

is called the Riemann-Christoffel, or covariant curvature, tensor Let us note the following important result Assume that the Riemannian space is Euclidean and that we are dealing with a cartesian coordinate system. Since $\Gamma^i_{jk}(x) = 0$, we have from (538)

$$B^i_{jkl} = 0 \tag{542}$$

in this coordinate system But if $B^i_{jkl} = 0$ in one coordinate system, the components are zero in all coordinate systems. Hence if a space is Euclidean, the curvature tensor must vanish. We shall show later that if $B^i_{jkl} = 0$, the space is Euclidean.

If we differentiate (538) and evaluate at the origin of a geodesic coordinate system, we obtain

$$B^{i}_{\alpha jk,\sigma} = \frac{\partial^2 \Gamma^{i}_{\alpha j}}{\partial x^\sigma \, \partial x^k} - \frac{\partial^2 \Gamma^{i}_{\alpha k}}{\partial x^\sigma \, \partial x^j}$$

Permuting j, k, σ and adding, we have the Bianchi identity

$$B^{i}_{\alpha kj,\sigma} + B^{i}_{\alpha\sigma j,k} + B^{i}_{\alpha k\sigma,l} = 0 \tag{543}$$

134. Euclidean Space. We have seen that if a space is Euclidean, of necessity $B^{i}_{jkl} = 0$ We shall now prove that if the $B^{i}_{jkl} = 0$, the space is Euclidean Now

$$\Gamma^{i}_{jk}(y) = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(x) \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} \frac{\partial x^\gamma}{\partial y^k} \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^j \, \partial y^k} \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha}$$

If there is a coordinate system $(x^1, x^2, \quad , x^n)$ for which $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(x) = 0$, then

$$\Gamma^{i}_{jk}(y) = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^j \, \partial y^k} \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \tag{544}$$

and conversely, if (544) holds, the $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(x) = 0$ Now let us investigate under what conditions (544) may result We write (544) as

$$\frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial y^j \, \partial y^k} = \frac{\partial x^\sigma}{\partial y^i} \Gamma^{i}_{jk}(y) \tag{545}$$

which represents a system of second-order differential equations Let us define

$$u^{\sigma}_{i} = \frac{\partial x^\sigma}{\partial y^i} \tag{546}$$

so that (545) becomes

$$\frac{\partial u^{\sigma}_{k}}{\partial y^j} = u^{\sigma}_{i} \Gamma^{i}_{jk}(y) \tag{547}$$

For each σ we have the first-order system of differential equations given by (546) and (547), which are special cases of the more general system

$$\frac{\partial z^k}{\partial y^j} = f_j^k(z^1, z^2, \ldots z^n, z^{n+1}, y^1, \ldots, y^n) \quad \begin{array}{l} k = 1, 2, \ldots, n+1 \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{array} \tag{548}$$

If we let $z^1 = x^\sigma$, $z^2 = u_1^\sigma$, $z^3 = u_2^\sigma$, $\ldots$, $z^{n+1} = u_n^\sigma$, Eqs (546) and (547) reduce to (548)

We certainly must have $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^l\,\partial y^j} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^j\,\partial y^l}$, and this implies

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f_j^k}{\partial y^l} + \frac{\partial f_j^k}{\partial z^\mu}\frac{\partial z^\mu}{\partial y^l} &= \frac{\partial f_l^k}{\partial y^j} + \frac{\partial f_l^k}{\partial z^\mu}\frac{\partial z^\mu}{\partial y^j} \\ \text{or}\qquad \frac{\partial f_j^k}{\partial y^l} + \frac{\partial f_j^k}{\partial z^\mu} f_l^\mu &= \frac{\partial f_l^k}{\partial y^j} + \frac{\partial f_l^k}{\partial z^\mu} f_j^\mu \end{aligned}\right\} \tag{549}$$

If the f_j^i are analytic, it can be shown that the integrability conditions (549) are also sufficient that (548) have a solution satisfying the initial conditions $z^k = z_0^k$ at $y^i = y_0^i$. The reader is referred to advanced texts on differential equations and especially to the elegant proof found in Gaston Darboux, "Leçons systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes," pp 325–336, Gauthier-Villars, Paris, 1910.

The integrability conditions (549), when referred to the system (546), (547), become

$$\begin{aligned} \Gamma_{jk}^\alpha u_\alpha^\sigma &= \Gamma_{kj}^\alpha u_\alpha^\sigma \\ \bar{B}_{jkl}^\alpha u_\alpha^\sigma &= 0 \end{aligned} \tag{550}$$

The first equation of (550) is satisfied from the symmetry of the $\bar{\Gamma}_{jk}^i$, and the second is satisfied if $\bar{B}_{jkl}^\alpha = 0$. Hence, if $\bar{B}_{jkl}^\alpha = 0$, we can solve (545) for $z^1 = x^\sigma$ in terms of $y^1, y^2, \ldots, y^n$. For the coordinate system $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, we have $\Gamma_{jk}^i(x) = 0$.

Problems

1. Show that $R_{hijk} = -R_{ihjk} = -R_{hikj}$ and that

$$R_{iijk} = R_{hikk} = 0$$

2 Show that $R_{hijk} + R_{hkij} + R_{hjki} = 0$

3 If $R_{ij} = kg_{ij}$, show that $R = nk$.

4 For a two-dimensional space for which $g_{12} = g_{21} = 0$, show that $R_{12} = 0$, $R_{11}g_{22} = R_{22}g_{11} = R_{1221}$ and that

$$R = \frac{R_{1221}}{g_{11}g_{22}}$$

$R_{ij} = \frac{1}{2}Rg_{ij}$.

5 Show that $B^i_{jkl} \neq 0$ for a space whose line element is given by $ds^2 = (dx^1)^2 + (\sin x^1)^2(dx^2)^2$

6 Derive (550) from (546), (547), (549)

7. If $R^i_j = g^{i\alpha}R_{\alpha j}$, show that $(R^i_j)_{,i} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial R}{\partial x^j}$.

CHAPTER 9

FURTHER APPLICATIONS OF TENSOR ANALYSIS

135. Frenet-Serret Formulas. Let $\lambda^i = \dfrac{dx^i}{ds}$ be the unit tangent vector to the space curve $x^i = x^i(t)$, $i = 1, 2, 3$, in a Riemannian space In Example 148 we saw that the contravariant vector $\dfrac{\delta\lambda^i}{\delta s}$ is normal to λ^i. Let us define the curvature as $\kappa = \left[g_{\alpha\beta}\dfrac{\delta\lambda^\alpha}{\delta s}\dfrac{\delta\lambda^\beta}{\delta s}\right]^{\frac{1}{2}}$ and the principal unit normal μ^i by

$$\frac{\delta\lambda^i}{\delta s} = \kappa\mu^i \tag{551}$$

Since μ^i is a unit vector, we know that $\dfrac{\delta\mu^i}{\delta s}$ is normal to μ^i Now $g_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\mu^\beta = 0$, so that the intrinsic derivative yields

$$g_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\frac{\delta\mu^\beta}{\delta s} + g_{\alpha\beta}\frac{\delta\lambda^\alpha}{\delta s}\mu^\beta = 0$$

since $g_{\alpha\beta,j} = 0$ or $\dfrac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta s} = 0$ Hence

$$g_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\frac{\delta\mu^\beta}{\delta s} + \kappa g_{\alpha\beta}\mu^\alpha\mu^\beta = 0$$

or

$$g_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\left(\frac{\delta\mu^\beta}{\delta s} + \kappa\lambda^\beta\right) = 0 \tag{552}$$

since $g_{\alpha\beta}\mu^\alpha\mu^\beta = g_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta \equiv 1$

Equation (552) shows that $\dfrac{\delta\mu^i}{\delta s} + \kappa\lambda^i$ is normal to λ^i, and since $\dfrac{\delta\mu^i}{\delta s}$ and λ^i are normal to μ^i, $\dfrac{\delta\mu^i}{\delta s} + \kappa\lambda^i$ is also normal to μ^i We

define the binormal ν^i by the equation

$$\nu^i = -\frac{1}{\tau}\left(\frac{\delta\mu^i}{\delta s} + \kappa\lambda^i\right) \tag{553}$$

or

$$\frac{\delta\mu^i}{\delta s} = -\kappa\lambda^i - \tau\nu^i \tag{554}$$

where τ is called the torsion and is the magnitude of

$$-\left(\frac{\delta\mu^i}{\delta s} + \kappa\lambda^i\right)$$

Since ν^i is normal to both λ^i and μ^i, we have

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}\nu^\alpha\lambda^\beta &= 0 \\ g_{\alpha\beta}\nu^\alpha\mu^\beta &= 0 \end{aligned} \tag{555}$$

By differentiating (555) and using (551), (554), (555), we leave it to the reader to show that

$$g_{\alpha\beta}\mu^\beta\left(\tau\mu^\alpha - \frac{\delta\nu^\alpha}{\delta s}\right) = 0 \tag{556}$$

The vector $\tau\mu^i - \dfrac{\delta\nu^i}{\delta s}$ is thus normal to all three vectors λ^i, μ^i, ν^i Since we are dealing in three-space, this is possible only if $\tau\mu^i - \dfrac{\delta\nu^i}{\delta s} = 0$, or

$$\frac{\delta\nu^i}{\delta s} = \tau\mu^i \tag{557}$$

Writing (551), (554), (557) in full, we have the Frenet-Serret formulas

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda^i}{ds} + \Gamma^i_{\alpha\beta}\,\lambda^\alpha\,\frac{dx^\beta}{ds} &= \kappa\mu^i \\ \frac{d\mu^i}{ds} + \Gamma^i_{\alpha\beta}\,\mu^\alpha\,\frac{dx^\beta}{ds} &= -(\kappa\lambda^i + \tau\nu^i) \\ \frac{d\nu^i}{ds} + \Gamma^i_{\alpha\beta}\,\nu^\alpha\,\frac{dx^\beta}{ds} &= \tau\mu^i \end{aligned} \tag{558}$$

For a Euclidean space using cartesian coordinates, the $\Gamma^i_{\alpha\beta} = 0$, and (558) reduces to the formulas encountered in Sec 24

Problems

1 Derive (556)

2 Using cylindrical coordinates,

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (x^1)^2(dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

and for a circle $x^1 = a$, $x^2 = t$, $x^3 = 0$ Expand (558) for this case, and show that $\kappa = 1/a$, $\tau = 0$

3 Show that $\dfrac{\delta^2\lambda^i}{\delta s^2} = -\kappa^2\lambda^i + \dfrac{\delta\kappa}{\delta s}\mu^i - \kappa\tau\nu^i$

4 Since (558) is true for a Euclidean space using cartesian coordinates, why would (558) hold for all other coordinate systems in this Euclidean space?

5 Since $\lambda^i = \dfrac{dx^i}{ds}$, show that $\dfrac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{\alpha\beta}\dfrac{dx^\alpha}{ds}\dfrac{dx^\beta}{ds}$ are the components of a contravariant vector

136. Parallel Displacement of Vectors. Consider an absolute contravariant vector $A^i(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ in a cartesian coordinate system. Let us assume that the components A^i are constants. Now

$$\bar{A}^i = A^\alpha \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha}, \qquad A^i = \bar{A}^\alpha \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\alpha}$$

so that

$$d\bar{A}^i = A^\alpha \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^\beta\, \partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\gamma} d\bar{x}^\gamma$$

since $dA^i = 0$ We thus obtain

$$d\bar{A}^i = \bar{A}^\sigma \frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^\beta\, \partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\sigma} d\bar{x}^\gamma$$

From (511*a*) (see page 292)

$$\bar{\Gamma}^i_{\gamma\sigma} = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \bar{x}^\gamma\, \partial \bar{x}^\sigma} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha}, \qquad \text{since } \Gamma^i_{jk} = 0$$

$$= -\frac{\partial^2 \bar{x}^i}{\partial x^\beta\, \partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^\gamma} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^\sigma} \qquad \text{from (483)}$$

so that

$$d\bar{A}^i = -\bar{A}^\sigma \bar{\Gamma}^i_{\sigma\gamma}\, d\bar{x}^\gamma \tag{559}$$

In general, a Riemannian space is not Euclidean We generalize (559) and define parallelism of a vector field A^i with respect to a curve C given by $x^i = x^i(s)$ as follows. We say that A^i is parallelly displaced with respect to the Riemannian V_n along the curve C, if

$$\frac{dA^i}{ds} = -A^\sigma \Gamma^i_{\sigma\tau} \frac{dx^\tau}{ds}$$

or

$$\boxed{\frac{\delta A^i}{\delta s} \equiv \frac{dA^i}{ds} + \Gamma^i_{\sigma\tau} A^\sigma \frac{dx^\tau}{ds} = 0} \qquad (560)$$

We say that the vector A^i suffers a parallel displacement along the curve Notice that the intrinsic derivative of A^i along the curve $x^i(s)$ vanishes

In particular, for a geodesic we have $\dfrac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{\alpha\beta} \dfrac{dx^\alpha}{ds} \dfrac{dx^\beta}{ds} = 0$, so that the unit tangent vector $\dfrac{dx^i}{ds}$ suffers a parallel displacement along the geodesic

Example 149 Let us consider two unit vectors A^i, B^i, which undergo parallel displacements along a curve We have

$$\cos\theta = g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta$$

and

$$\frac{\delta(\cos\theta)}{\delta s} = g_{\alpha\beta} \frac{\delta A^\alpha}{\delta s} B^\beta + g_{\alpha\beta} A^\alpha \frac{\delta B^\beta}{\delta s} = 0$$

so that $\theta \equiv$ constant Hence, if two vectors of constant magnitudes undergo parallel displacements along a given curve, they are inclined at a constant angle.

Two vectors at a point are said to be parallel if their corresponding components are proportional If A^i is a vector of constant magnitude, the vector $B^i = \varphi A^i$, $\varphi =$ scalar, is parallel to A^i If A^i is also parallel with respect to the V_n along a curve $x^i = x^i(s)$, we have $\dfrac{\delta A^i}{\delta s} = 0$. Now

$$\frac{\delta B^i}{\delta s} = \varphi \frac{\delta A^i}{\delta s} + \frac{d\varphi}{ds} A^i = \frac{d\varphi}{ds} A^i = \frac{1}{\varphi} \frac{d\varphi}{ds} B^i = \frac{d(\log\varphi)}{ds} B^i$$

We desire B^i to be parallel with respect to the V_n along the curve, so that a vector B^i of variable magnitude must satisfy an equation of the type

$$\frac{\delta B^i}{\delta s} = f(s)B^i \tag{561}$$

if it is to be parallelly displaced along the curve.

Problems

1 Show that if the vector A^i of constant magnitude is parallelly displaced along a geodesic, it makes a constant angle with the geodesic

2 If a vector A^i satisfies (560), show that it is of constant magnitude

3 If a vector B^i satisfies (561) along a curve Γ, by letting $A^i = \psi B^i$ show that it is possible to find ψ so that A^i suffers a parallel displacement along Γ

4 Let $x^i(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$, be an infinitesimal closed path. The change in the components of a contravariant vector on being parallelly displaced along this closed path is $\Delta A^i = -\oint \Gamma^i_{\alpha\beta} A^\alpha \, dx^\beta$, from (560) Expand $A^\alpha(x)$, $\Gamma^i_{\alpha\beta}(x)$ in Taylor series about $x^i_0 = x^i(0)$, and neglecting infinitesimals of higher order, show that

$$\Delta A^i = \tfrac{1}{4} R^i_{\alpha\beta\gamma} A^\alpha \oint x^\gamma \, dx^\beta - x^\beta \, dx^\gamma$$

where $R^i_{\alpha\beta\gamma}$ is the curvature tensor (see Secs 132, 133, 134).

137. Parallelism in a Subspace. We start with the Riemannian space, V_n, $ds^2 = g_{\alpha\beta} \, dx^\alpha \, dx^\beta$. If we consider the transformation

$$x^\alpha = x^\alpha(u^1, u^2, \ldots, u^m), \qquad m < n \tag{562}$$

we see that a point with coordinates $u^1, u^2, \ldots, u^m$ is a point of V_m and also a point of V_n The converse is not true, for given the point with coordinates $x^1, x^2, \ldots, x^n$, there may not exist $u^1, u^2, \ldots, u^m$ which satisfy $x^\alpha = x^\alpha(u^1, u^2, \ldots, u^m)$, since $m < n$. Now

$$\begin{aligned} ds^2 = g_{\alpha\beta} \, dx^\alpha \, dx^\beta &= g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial u^j} du^i \, du^j \\ &= h_{ij} \, du^i \, du^j \end{aligned}$$

so that the fundamental metric tensor in the subspace, V_m, is given by

$$h_{ij} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial u^j}$$

Now $dx^\alpha = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} du^i$, so that if du^i are the components of a contravariant vector in the V_m, dx^α are the components of the same vector in the V_n. In general, if $a^i(u^1, \ldots, u^m)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, are the components of a contravariant vector in the V_m, we say that

$$A^\alpha \equiv \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} a^i \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n \tag{563}$$

are the components of the same vector in the V_n

We now find a relationship between $\dfrac{\delta A^\alpha}{\delta s}$ and $\dfrac{\delta a^i}{\delta s}$, where s is arc length along the curve $u^i = u^i(s)$ or the space curve

$$x^\alpha = x^\alpha[u^i(s)]$$

Differentiating (563), we have

$$\frac{dA^\alpha}{ds} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \frac{da^i}{ds} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial u^j \partial u^i} \frac{du^j}{ds} a^i$$

and

$$\frac{\delta A^\alpha}{\delta s} \equiv \frac{dA^\alpha}{ds} + (\Gamma^\alpha_{\beta\gamma})_g A^\beta \frac{dx^\gamma}{ds} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} \frac{da^i}{ds} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial u^j \partial u^i} \frac{du^j}{ds} a^i + (\Gamma^\alpha_{\beta\gamma})_g a^i \frac{\partial x^\beta}{\partial u^i} \frac{\partial x^\gamma}{\partial u^j} \frac{du^j}{ds}$$

Hence

$$g_{\sigma\alpha} \frac{\partial x^\sigma}{\partial u^k} \frac{\delta A^\alpha}{\delta s} = h_{ik} \frac{da^i}{ds} + a^i \frac{du^j}{ds} \left[g_{\sigma\alpha} (\Gamma^\alpha_{\beta\gamma})_g \frac{\partial x^\beta}{\partial u^i} \frac{\partial x^\gamma}{\partial u^j} \frac{\partial x^\sigma}{\partial u^k} + g_{\sigma\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial u^j \partial u^i} \frac{\partial x^\sigma}{\partial u^k} \right]$$

$$g_{\sigma\alpha} \frac{\partial x^\sigma}{\partial u^k} \frac{\delta A^\alpha}{\delta s} = h_{lk} \frac{da^l}{ds} + a^i \frac{du^j}{ds} h_{lk} (\Gamma^l_{ji})_h, \quad \text{(see Prob 6, Sec. 129)}$$

Hence

$$g_{\sigma\alpha}\frac{\partial x^\sigma}{\partial u^k}\frac{\delta A^\alpha}{\delta s} = h_{lk}\left[\frac{da^l}{ds} + (\Gamma^l_{ji})_h a^i \frac{du^j}{ds}\right]$$

and

$$\boxed{g_{\sigma\alpha}\frac{\partial x^\sigma}{\partial u^k}\frac{\delta A^\alpha}{\delta s} = h_{lk}\frac{\delta a^l}{\delta s}} \tag{564}$$

From (564) we see that if a^i is parallelly displaced along $x^\alpha[u^i(s)]$, that is, if $\dfrac{\delta A^i}{\delta s} = 0$, then $\dfrac{\delta a^i}{\delta s} = 0$ Thus the theorem: If a curve C lies in a subspace V_m of V_n, and a vector field in V_m is parallel along C with respect to V_n, then it is also parallel along C with respect to V_m

Problems

1 Prove that if a curve is a geodesic in a V_n, it is a geodesic in any subspace V_m of V_n Consider the unit tangents to the geodesics

2 By considering k fixed, show that $\dfrac{\partial x^\sigma}{\partial u^k}$ is a contravariant vector of V_n tangent to the u^k curve, obtained by considering $u^1, u^2, \ldots u^{k-1}, u^{k+1}, \ldots u^m$ fixed in the equations

$$x^\alpha = x^\alpha(u^1, \ldots, u^m)$$

3 If a^i is parallel along C with respect to the V_m, show that $\dfrac{\delta A^\alpha}{\delta s}$ is normal to the space V_m, that is, normal to the u^i curves, $i = 1, 2, \ldots, m$

4. Under a coordinate transformation $\bar{u}^i = \bar{u}^i(u^1, \ldots, u^m)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, the x^α remain invariant Hence show that

$$x^\alpha_{,j} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^j}, \qquad g_{\alpha\beta,j} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma}x^\sigma_{,j}$$

where the covariant derivatives are performed relative to the metric h_{ij}, that is, $a^i_{,j} = \dfrac{\partial a^i}{\partial u^j} + a^k(\Gamma^i_{jk})_h$

5 Show that $g_{\alpha\beta}(x^\alpha_{,ik}x^\beta_{,j} + x^\alpha_{,i}x^\beta_{,jk}) + x^\alpha_{,i}x^\beta_{,j}x^\sigma_{,k}\dfrac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} = 0$, where covariant differentiation is with respect to u^i and h_{ij}

6 Show that $A^\alpha_{,j} = x^\alpha_{,ij}a^i + x^\alpha_{,i}a^i_{,j}$, for each α

138. Generalized Covariant Differentiation. The quantities $\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}$ are contravariant vectors if we consider i fixed, for if

$$x^\alpha = x^\alpha(u^1, \ldots, u^m)$$

and $y^\alpha = y^\alpha(x^1, \ldots, x^n)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$, then

$$\frac{\partial y^\alpha}{\partial u^i} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\beta}{\partial u^i}$$

showing that the $\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}$ transform like a contravariant vector. However, if we consider α as fixed, the $\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, are covariant vectors in the V_m, for if $\bar{u}^i = \bar{u}^i(u^1, \ldots, u^m)$, we have $\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{u}^i} = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial u^j}\dfrac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^i}$ We propose to consider tensors of this type, Latin indices indicating tensors of the V_m, and Greek indices indicating tensors of the V_n

Let us consider the tensor A^α_i We wish to derive a new tensor which will be a tensor in the V_n for Greek indices and a tensor in V_m for Latin indices We consider a curve C in V_m given by $u^i = u^i(s)$ and by $x^\alpha = x^\alpha(s)$ in V_n Let b^i be the components of a vector field in V_m parallel along C with respect to V_m, and let c_α be the components of a vector field in V_n parallel along C with respect to V_n We have

$$\begin{aligned} \frac{db^i}{ds} + \Gamma^i_{jk}b^j\frac{du^k}{ds} &= 0 \\ \frac{dc_\alpha}{ds} - \Gamma^\mu_{\alpha\beta}c_\mu\frac{dx^\beta}{ds} &= 0 \end{aligned} \tag{565}$$

We now consider the product $b^ic_\alpha A^\alpha_i$. In V_n this product is an invariant (scalar product) for each i, and in V_m it is a scalar invariant and is a function of arc length s along C Its derivative is

$$\frac{d}{ds}(b^i c_\alpha A^\alpha_i) = b^i c_\alpha \frac{dA^\alpha_i}{ds} + b^i A^\alpha_i \frac{dc_\alpha}{ds} + \frac{db^i}{ds} c_\alpha A^\alpha_i$$
$$= b^j c_\sigma \left(\frac{dA^\sigma_j}{ds} + A^\alpha_j \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \frac{dx^\beta}{ds} - A^\sigma_i \Gamma^i_{jk} \frac{du^k}{ds} \right)$$

making use of (565) Since b^j and c_σ are arbitrary vectors, and since $\frac{d}{ds}(b^i c_\alpha A^\alpha_i)$ is a scalar invariant, it follows from the quotient law that

$$\frac{dA^\sigma_j}{ds} + A^\alpha_j \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \frac{dx^\beta}{ds} - A^\sigma_i \Gamma^i_{jk} \frac{du^k}{ds} \tag{566}$$

is a tensor of the same type as A^σ_j We call it the intrinsic derivative of A^σ_j with respect to s

We may write (566) as

$$\left(\frac{\partial A^\sigma_j}{\partial u^k} + A^\alpha_j \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial u^k} - A^\sigma_i \Gamma^i_{jk} \right) \frac{du^k}{ds}$$

and since this is a tensor for all directions $\frac{du^k}{ds}$ (the directions $\frac{du^k}{ds}$ of C are arbitrary), it follows from the quotient law that

$$\boxed{A^\sigma_{j,k} \equiv \frac{\partial A^\sigma_j}{\partial u^k} + A^\alpha_j \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial u^k} - A^\sigma_i \Gamma^i_{jk}} \tag{567}$$

is the generalized covariant derivative of A^σ_j with respect to the V_m

Problems

1 Why is $A^\sigma_{j,k}$ a contravariant vector in V_n?

2 Show that

$$A^\alpha_{\beta i,j} \equiv \frac{\partial A^\alpha_{\beta i}}{\partial u^j} + \Gamma^\alpha_{\sigma\tau} A^\sigma_{\beta i} \frac{\partial x^\tau}{\partial u^j} - \Gamma^\sigma_{\beta\tau} A^\alpha_{\sigma i} \frac{\partial x^\tau}{\partial u^j} - \Gamma^k_{ij} A^\alpha_{\beta k}$$

is a mixed tensor, by considering the scalar invariant $b^\beta c^i d_\alpha A^\alpha_{\beta i}$

3 Show that $x^\alpha_{,i} = x^\alpha_i = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}$, and that

$$x^\alpha_{,ij} = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial u^i\, \partial u^j} - \Gamma^h_{ij} x^\alpha_{,h} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} x^\beta_{,i} x^\gamma_{,j}$$
$$= x^\alpha_{,ij} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} x^\beta_{,i} x^\gamma_{,j}$$

4 Show that $g_{\alpha\beta} x^\alpha_{,ik} x^\beta_{,j} + g_{\alpha\beta} x^\alpha_{,i} x^\beta_{,jk} = 0$, and show by cyclic permutations that $g_{\alpha\beta} x^\alpha_{,ij} x^\beta_{,k} = 0$

5. The $x^\alpha_{,ij}$ of Prob 4 are normal to the vectors $x^\beta_{,k}$, the tangent vectors to the surface Hence the $x^\alpha_{,ij}$ are components of a vector normal to the subspace V_m If N^i are the components of a unit normal to V_m, we must have $x^\alpha_{,ij} = b_{ij} N^\alpha$. We call $B = b_{ij}\, du^i\, du^j$ the second fundamental form Show that $b_{ij} = g_{\alpha\beta} x^\alpha_{,ij} N^\beta$. If the V_n is a Euclidean V_3, $g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, show that $b_{11} = e$, $b_{12} = f$, $b_{22} = g$ (see Sec 35) for the subspace $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$

139. Riemannian Curvature. Schur's Theorem. Let us consider a point P of a Riemannian space We associate with P two independent vectors λ^α_1, λ^α_2 These vectors determine a pencil of directions at P, given by

$$\xi^\alpha = a^1 \lambda^\alpha_1 + a^2 \lambda^\alpha_2 = a^j \lambda^\alpha_j$$

Every pair of numbers a^1, a^2 determines a direction ξ^α Since the geodesics are second-order differential equations, the point P and the direction ξ^α at P determine a unique geodesic. The locus of all geodesics determined in this manner will yield a surface. In a Euclidean space the surface will be a plane, since the geodesics are straight lines and two vectors determine a plane

We now introduce normal coordinates y^α with origin at P The equations of the geodesics take the form $y^\alpha = \xi^\alpha s$, where $\xi^\alpha = \left(\frac{dy^\alpha}{ds}\right)_P$, and the geodesic surface is given by

$$\begin{aligned} y^\alpha &= a^1 s \lambda^\alpha_1 + a^2 s \lambda^\alpha_2 \\ &= u^1 \lambda^\alpha_1 + u^2 \lambda^\alpha_2 = u^j \lambda^\alpha_j \end{aligned} \tag{568}$$

j summed from 1 to 2 and $u^1 = a^1 s$, $u^2 = a^2 s$.

The element of distance on the surface is given by

$$ds^2 = h_{ij}\, du^i\, du^j \tag{569}$$

and if $ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dy^\alpha\, dy^\beta$ for the V_n, then

$$h_{ij} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial u^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial u^j} = g_{\alpha\beta} \lambda^\alpha_i \lambda^\beta_j \tag{569a}$$

where the $g_{\alpha\beta}$ represent the components of the fundamental metric tensor in the system of normal coordinates

Now let R_{ijkl} be the components of the curvature tensor for the surface S with coordinates u^1, u^2 Let us note the following The $g_{\alpha\beta}$ of a Riemannian space completely determine the Christoffel symbols $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$, which in turn specify completely the Riemann-Christoffel tensor $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ Once the metric of a surface embedded in a V_n is determined, we can determine the Γ^{i}_{jk} for this surface, and the R_{ijkl} can then be determined We need not make any reference to the embedding space, V_n, to determine the R_{ijkl} It is apparent that the h_{ij} can be determined without leaving the surface, so that all results and formulas derived from the h_{ij} are intrinsic properties of the surface All we are trying to say is that $ds^2 = h_{ij}\,du^i\,du^j$ is the fundamental metric tensor for a Riemannian space which happens to be a surface embedded in a Riemannian V_n. We shall use Latin indices for the space determined by the metric h_{ij} and Greek letters for the V_n.

The indices of R_{ijkl} take on the values 1 or 2, and from Prob 1, Sec 134, we have that

$$
\begin{aligned}
R_{1212} &= R_{2121} = -R_{1221} = -R_{2112} \\
R_{1111} = R_{1122} = R_{1122} = \cdot &= R_{1121} = \cdot = R_{2222} = 0
\end{aligned}
\tag{570}
$$

If we make an analytic transformation, $\bar{u}^i = \bar{u}^i(u^1, u^2)$, $i = 1, 2$, then

$$
\bar{R}_{ijkl}(\bar{u}) = R_{abcd}(u)\,\frac{\partial u^a}{\partial \bar{u}^i}\,\frac{\partial u^b}{\partial \bar{u}^j}\,\frac{\partial u^c}{\partial \bar{u}^k}\,\frac{\partial u^d}{\partial \bar{u}^l}
$$

and

$$
\begin{aligned}
\bar{R}_{1212} &= R_{abcd}\,\frac{\partial u^a}{\partial \bar{u}^1}\,\frac{\partial u^b}{\partial \bar{u}^2}\,\frac{\partial u^c}{\partial \bar{u}^1}\,\frac{\partial u^d}{\partial \bar{u}^2} \\
&= R_{1212}\left(\frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1}\,\frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} - \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2}\,\frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1}\right)^2
\end{aligned}
\tag{571}
$$

by making use of (570) Thus

$$
\bar{R}_{1212} = R_{1212}\left[J\left(\frac{u^1, u^2}{\bar{u}^1, \bar{u}^2}\right)\right]^2 \tag{572}
$$

Moreover, $d\bar{s}^2 = \bar{h}_{ij}\,d\bar{u}^i\,d\bar{u}^j$, and $\bar{h}_{ij} = h_{ab}\,\dfrac{\partial u^a}{\partial \bar{u}^i}\,\dfrac{\partial u^b}{\partial \bar{u}^j}$, so that

$|\bar{h}| = |h|J^2$ We rewrite (572) in the form

$$\boxed{K = \frac{R_{1212}}{|h|} = \frac{\bar{R}_{1212}}{|\bar{h}|}} \tag{573}$$

Equation (573) shows that K is an invariant, and it is called the Gaussian curvature It is an intrinsic property of the surface

We now determine an alternative form for K in terms of the directions λ_1^α and λ_2^α and the curvature tensor for the V_n at the point P. The coordinate transformation between the Christoffel symbols is given by (see Prob 6, Sec 129)

$$h_{il}\Gamma^l_{jk}(u) = g_{\alpha\mu}\Gamma^\mu_{\beta\gamma}(y)\frac{\partial y^\alpha}{\partial u^i}\frac{\partial y^\beta}{\partial u^j}\frac{\partial y^\gamma}{\partial u^k} + g_{\alpha\beta}\frac{\partial^2 y^\beta}{\partial u^j\,\partial u^k}\frac{\partial y^\alpha}{\partial u^i}$$

which reduces to

$$h_{il}\Gamma^l_{jk} = g_{\alpha\mu}\Gamma^\mu_{\beta\gamma}\lambda_i^\alpha\lambda_j^\beta\lambda_k^\gamma \tag{574}$$

since $\dfrac{\partial y^\alpha}{\partial u^j} = \lambda_j^\alpha$, $\dfrac{\partial^2 y^\alpha}{\partial u^k\,\partial u^j} = 0$, from (568)

At the point P, $\Gamma^\mu_{\beta\gamma}(y) = 0$ (see Sec 131), so that $h_{il}\Gamma^l_{jk} = 0$ or $h^{im}h_{il}\Gamma^l_{jk} = \Gamma^m_{jk} = 0$ Hence the curvature tensor can be written

$$\begin{aligned} R_{1212}(P) &= h_{1l}R^l_{212}(P) \\ &= h_{1l}\left[\frac{\partial\Gamma^l_{21}(P)}{\partial u^2} - \frac{\partial\Gamma^l_{22}(P)}{\partial u^1}\right] \end{aligned} \tag{575}$$

from (538) and (541)

From (574), $h_{1l}\Gamma^l_{21}(u) = g_{\alpha\mu}\Gamma^\mu_{\beta\gamma}(y)\lambda_1^\alpha\lambda_2^\beta\lambda_1^\gamma$, so that at the origin of Riemannian coordinates

$$h_{1l}\frac{\partial\Gamma^l_{21}}{\partial u^2} = g_{\alpha\mu}\frac{\partial\Gamma^\mu_{\beta\gamma}}{\partial y^\tau}\lambda_1^\alpha\lambda_2^\beta\lambda_1^\gamma\lambda_2^\tau \tag{576}$$

since $\dfrac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial y^\mu} = g_{\sigma\beta}\Gamma^\sigma_{\alpha\mu} + g_{\sigma\alpha}\Gamma^\sigma_{\beta\mu} = 0$ at the origin (Prob 6, Sec 128),

and from (569a) $\dfrac{\partial h_{ij}}{\partial u^k} = \lambda_i^\alpha\lambda_j^\beta\lambda_k^\gamma\dfrac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma} = 0$ Similarly

$$h_{1l}\frac{\partial\Gamma^l_{22}}{\partial u^1} = g_{\alpha\mu}\frac{\partial\Gamma^\mu_{\beta\gamma}}{\partial y^\tau}\lambda_1^\alpha\lambda_2^\beta\lambda_2^\gamma\lambda_1^\tau \tag{577}$$

Using (538), (541), (576), (577), it is easy to show that

$$R_{1212} = \lambda_1^\alpha\lambda_2^\beta\lambda_1^\gamma\lambda_2^\tau R_{\alpha\beta\gamma\tau} \tag{578}$$

Finally,

$$|h| = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix} = h_{11}h_{22} - h_{12}^2$$

and

$$h_{11} = g_{\alpha\beta}\frac{\partial y^\alpha}{\partial u^1}\frac{\partial y^\beta}{\partial u^1} = g_{\alpha\beta}\lambda_1^\alpha\lambda_1^\beta$$

$$h_{12} = g_{\alpha\beta}\lambda_1^\alpha\lambda_2^\beta$$

$$h_{22} = g_{\alpha\beta}\lambda_2^\alpha\lambda_2^\beta$$

so that

$$|h| = \lambda_1^\alpha\lambda_2^\beta\lambda_1^\sigma\lambda_2^\tau(g_{\alpha\sigma}g_{\beta\tau} - g_{\alpha\tau}g_{\beta\sigma}) \tag{579}$$

Thus

$$\boxed{K = \frac{R_{\alpha\beta\sigma\tau}\lambda_1^\alpha\lambda_2^\beta\lambda_1^\sigma\lambda_2^\tau}{\lambda_1^\alpha\lambda_2^\beta\lambda_1^\sigma\lambda_2^\tau(g_{\alpha\sigma}g_{\beta\tau} - g_{\alpha\tau}g_{\beta\sigma})}} \tag{580}$$

We are now in a position to prove Schur's theorem If at each point of a Riemannian space, K is independent of the orientation $(\lambda_1^\alpha, \lambda_2^\alpha)$, K is constant throughout the space

It follows at once if K is independent of λ_1^α, λ_2^α, that

$$R_{\alpha\beta\sigma\tau} = K(g_{\alpha\sigma}g_{\beta\tau} - g_{\alpha\tau}g_{\beta\sigma})$$

and so

$$R_{\alpha\beta\sigma\tau,\mu} = K_{,\mu}(g_{\alpha\sigma}g_{\beta\tau} - g_{\alpha\tau}g_{\beta\sigma})$$

$$R_{\alpha\beta\mu\sigma,\tau} = K_{,\tau}(g_{\alpha\mu}g_{\beta\sigma} - g_{\alpha\sigma}g_{\beta\mu})$$

$$R_{\alpha\beta\tau\mu,\sigma} = K_{,\sigma}(g_{\alpha\tau}g_{\beta\mu} - g_{\alpha\mu}g_{\beta\tau})$$

Adding and using Bianchi's identity, (543), we have

$$K_{,\mu}(g_{\alpha\sigma}g_{\beta\tau} - g_{\alpha\tau}g_{\beta\sigma}) + K_{,\tau}(g_{\alpha\mu}g_{\beta\sigma} - g_{\alpha\sigma}g_{\beta\mu}) + K_{,\sigma}(g_{\alpha\tau}g_{\beta\mu} - g_{\alpha\mu}g_{\beta\tau}) = 0$$

Multiplying the above equation by $g^{\alpha\sigma}$ and summing, we have

$$K_{,\mu}(ng_{\beta\tau} - g_{\beta\tau}) + K_{,\tau}(g_{\beta\mu} - ng_{\beta\mu}) + K_{,\tau}g_{\beta\mu} - K_{,\mu}g_{\beta\tau} = 0$$

or

$$(n-2)g_{\beta\tau}K_{,\mu} = (n-2)K_{,\tau}g_{\beta\mu}$$

and $g_{\beta\tau}K_{,\mu} = g_{\beta\mu}K_{,\tau}$, or $\delta_\tau^\sigma K_{,\mu} = \delta_\mu^\sigma K_{,\tau}$, if $n > 2$ For $n = 2$ there is no arbitrary orientation

If we choose $\sigma = \tau \neq \mu$, $K_{,\mu} = 0$ This is true for all μ since μ can be chosen arbitrarily from 1 to n Hence $K \equiv$ constant throughout all of space. Such a space is said to be of constant curvature

Problems

1 Derive (571)

2 Derive (575).

3 Derive (578)

4 For a V_3 for which $g_{ij} = 0$, $i \neq j$, show that if h, i j are unequal,

$$R_{ij} = \frac{1}{g_{hh}} R_{ihhj}$$

$$R_{hh} = \frac{1}{g_{ii}} R_{hiih} + \frac{1}{g_{jj}} R_{hjjh}$$

$$R = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{1}{g_{ii}g_{jj}} R_{ijji}$$

5 If $R_i^\alpha \equiv g^{\alpha j} R_{ij}$, show that $R^\alpha_{i,\alpha} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial R}{\partial x^i}$

6 If $R_{ij} = k g_{ij}$ (an Einstein space), show that $R = g^{ij} R_{ij} = nk$, or $R_{ij} = (R/n) g_{ij}$

7 Show that a space of constant curvature K is an Einstein space and that $R = Kn(1 - n)$

140. Lagrange's Equations. Let L be any scalar invariant function of the coordinates $q^1, q^2, \quad , q^n$, their time derivatives $\dot{q}^1, \dot{q}^2, \quad . . . , \dot{q}^n$, and the time t

$$L = L(q^i, \dot{q}^i, t) = \bar{L}(\bar{q}^i, \dot{\bar{q}}^i, t)$$

If we perform a transformation of coordinates,

$$q^\alpha = q^\alpha(\bar{q}^1, \bar{q}^2, \qquad , \bar{q}^n)$$

$\alpha = 1, 2, \qquad , n$, then $\dot{q}^\alpha = \dfrac{\partial q^\alpha}{\partial \bar{q}^\beta} \dot{\bar{q}}^\beta$, so that $\dot{q}^\alpha$ is a function of the $\bar{q}^i$, $\dot{\bar{q}}^i$ Now

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{q}^i} &= \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\frac{\partial q^\alpha}{\partial \bar{q}^i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\frac{\partial \dot{q}^\alpha}{\partial \bar{q}^i} \\ &= \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\frac{\partial q^\alpha}{\partial \bar{q}^i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\frac{\partial^2 q^\alpha}{\partial \bar{q}^i\,\partial \bar{q}^\beta}\dot{\bar{q}}^\beta \qquad (581)\end{aligned}$$

where we consider $\bar{q}^i$ and $\dot{\bar{q}}^i$ as independent variables in $\bar{L}$ Now also

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\frac{\partial q^\alpha}{\partial \bar{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\frac{\partial \dot{q}^\alpha}{\partial \bar{q}^i}$$

so that

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{q}}^i}\right) = \frac{\partial q^\alpha}{\partial \bar{q}^i}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\frac{\partial^2 q^\alpha}{\partial \bar{q}^\beta\,\partial \bar{q}^i}\dot{\bar{q}}^\beta \tag{582}$$

Subtracting (581) from (582), we obtain

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\bar{q}}^i}\right) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \bar{q}^i} = \frac{\partial q^\alpha}{\partial \bar{q}^i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha}\right]$$

which shows that the $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q^\alpha}$ are the components of a covariant vector.

For a system of particles, let $L = T - V$, where T is the kinetic energy, $T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left(\frac{ds_i}{dt}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i g_{\alpha\beta}\dot{x}_i^\alpha \dot{x}_i^\beta$

$$V(x_1^1, x_1^2, x_1^3, x_2^1, x_2^2, x_2^3, \quad , x_n^3)$$

is the potential function, $-\dfrac{\partial V}{\partial x_s^r} = (F^r)_s$ Then

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_s^r}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_s^r} = \frac{d}{dt}(m_s g_{\alpha r}\dot{x}_s^\alpha) - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2} m_i \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_s^r}\dot{x}_i^\alpha \dot{x}_i^\beta + \frac{\partial V}{\partial x_s^r}$$
$$= m_s\ddot{x}_s^r - (F^r)_s, \quad \text{if } g_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$$

and $m_s\ddot{x}_s^r - (F^r)_s = 0$ for a Euclidean space and Newtonian mechanics Hence $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_s^r}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_s^r}$ vanishes in all coordinate systems We replace the x_s^r by any system of coordinates q^1, q^2, $\quad$, q^n which completely specify the configuration of the system of particles, and Lagrange's equations of motion are

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^r}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^r} = 0, \quad r = 1, 2, \quad , n} \tag{583}$$

Example 150 In spherical coordinates, a particle has the square of the velocity $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2$, so that

$$L = T - V = \frac{m}{2}(r^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\, \varphi^2) - V$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m(r\dot{\theta}^2 + r \sin^2\theta\, \varphi^2) - \frac{\partial V}{\partial r}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial r}\right) = mr$$

and one of Lagrange's equations of motion is

$$mr - m(r\dot{\theta}^2 + r \sin^2\theta\, \varphi^2) + \frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

Since $-\dfrac{\partial V}{\partial r}$ represents the radial force, the quantity

$$r - (r\dot{\theta}^2 + r \sin^2\theta\, \varphi^2)$$

must be the radial acceleration

If no potential function exists, we can modify Lagrange's equations as follows: We know that $T = (m/2)g_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta$ is a scalar invariant, so that

$$Q_r = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x^r}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^r} \tag{584}$$

are the components of a covariant vector In cartesian coordinates, the Q_r are the components of the Newtonian force, so that Q_r is the generalized force vector If f_r are the components of the force vector in a y^1-y^2- $\cdots$ -y^n coordinate system, then

$$Q_r = f_\alpha \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^r}$$

and

$$Q_r\, dx^r = f_\alpha \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^r}\, dx^r = f_\alpha\, dy^\alpha$$

is a scalar invariant The reader will immediately realize that $f_\alpha\, dy^\alpha$ represents the differential of work, dW, so that

$$Q_i = \frac{\partial W}{\partial x^i} \tag{585}$$

We obtain Q_i by allowing x^i to vary, keeping $x^1, x^2, \quad , x^{i-1}, x^{i+1}, \quad . , x^n$ fixed, calculate the work ΔW_i done by the forces, and compute

$$Q_i = \lim_{\Delta x^i \to 0} \frac{\Delta W_i}{\Delta x^i}, \qquad i \text{ not summed}$$

Example 151 A particle slides in a frictionless tube which rotates in a horizontal plane with constant angular speed ω The only horizontal force is the reaction R of the tube on the particle We have $T = (m/2)(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$, so that (584) becomes

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 &= Q_r \\ \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) &= Q_\theta \end{aligned} \tag{586}$$

with $Q_r = 0$, $Q_\theta = \dfrac{R(r\,d\theta)}{d\theta} = rR$ The solution to (586) is $r = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$, $R = 2m\omega \dfrac{dr}{dt}$, since $\dot{\theta} = \omega$.

Problems

1 A particle slides in a frictionless tube which rotates in a vertical plane with constant angular speed ω Set up the equations of motion

2 For a rigid body with one point fixed,

$$T = \tfrac{1}{2}A(\omega_x^2 + \omega_y^2) + \tfrac{1}{2}C\omega_z^2$$

Using Eulerian angles, show that if $Q_\varphi = Q_\psi = 0$, then

$$\begin{aligned} C(\dot{\varphi} + \cos\theta\,\dot{\psi}) &= R \\ A\dot{\psi}\sin^2\theta + R\cos\theta &= S \\ A\ddot{\theta} - A\dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta + R\dot{\psi}\sin\theta &= Q_\theta \end{aligned}$$

where R, S are constants of integration

3. If $T = a_{\alpha\beta}(q^1, \quad , q^n)\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta$, show that $2T = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}^\alpha}\dot{q}^\alpha$

4 Define $p_r = \dfrac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^r}$, and assuming we can solve for $\dot{q}^r = \dot{q}^r(q^1, \quad , q^n, p_1, \quad , p_n)$, show that the Hamiltonian

H defined by $H = p_\alpha q^\alpha - L$ satisfies

$$H = T + V = h \text{ (a constant)}$$

where $V = V(q^1, \ldots, q^n)$, $T = a_{\alpha\beta}(q^1, \ldots, q^n)q^\alpha q^\beta$ Also show that

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q^r} &= -p_r \\ \frac{\partial H}{\partial p_r} &= q^r \end{aligned}\right\}$$

These are Hamilton's equations of motion, the p_r are called the generalized momentum coordinates Show that they are the components of a covariant vector.

5 By extremalizing the integral $\int_{t_0}^{t_1} L(x^i, x^i, t)\,dt$, show that Lagrange's equations result

6 If the action integral

$$A = \sqrt{2M}\int_A^B \left[(h - V)g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda}\right]^{\frac{1}{2}} d\lambda$$

is extremalized, show that the result yields

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x^r}\right) - \frac{\partial T}{\partial x^r} = -\frac{\partial V}{\partial x^r}$$

where $T + V = h$, the constant of energy The path of the particle is the same as the geodesic of a space having the metric

$$ds^2 = 2M(h - V)g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta$$

141. Einstein's Law of Gravitation. We look for a law of motion, which will be independent of the coordinate system used, describing the gravitational field of a single particle In the special theory of relativity, the line element for the space-time coordinates is given by

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2\,dt^2 \\ &= -dr^2 - r^2\,d\theta^2 - r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2 + c^2\,dt^2 \qquad (587) \end{aligned}$$

In the space of x, y, z, t, the $g_{\alpha\beta}$ are constants and the space is

flat (Euclidean), so that $B^i_{jkl} = 0$ For a gravitating particle we postulate that the Ricci tensor R_{ij} vanish (see Probs 5 and 6 of this section) Since $R_{ij} = R_{ji}$, a four-dimensional space yields $n(n+1)/2 = 10$ equations involving the g_{ij} and their derivatives From Prob 7, Sec 134, we have $R^i_{j,i} = \frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial x^j}$, where $R^i_j = g^{i\alpha}R_{\alpha j}$, $R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$, and for $j = 1, 2, 3, 4$ the 10 equations are essentially reduced to 6 equations

We assume the line element (due to Schwarzchild) to be of the form

$$ds^2 = -e^{\lambda(r)}\,dr^2 - r^2\,d\theta^2 - r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2 + e^{\nu(r)}\,dt^2 \qquad (588)$$

so that our space is non-Euclidean We do not include terms of the form $dr\,d\theta$, etc , because we expect our space to be homogeneous and isotropic. We have

$$g_{11} = -e^{\lambda}, \qquad g_{22} = -r^2, \qquad g_{33} = -r^2\sin^2\theta, \qquad g_{44} = e^{\nu}$$
$$g_{ij} = 0, \qquad i \neq j \qquad (589)$$

and

$$g^{11} = -e^{-\lambda}, \qquad g^{22} = -r^{-2}, \qquad g^{33} = -(r^2\sin^2\theta)^{-1}$$
$$g^{44} = e^{-\nu}, \qquad g^{ij} = 0, \qquad i \neq j$$

Now $\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{i\sigma}\left(\frac{\partial g_{\sigma j}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{k\sigma}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\sigma}\right)$, and since $g^{i\sigma} = 0$ for $i \neq \sigma$, we have

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{ii}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right) \qquad i \text{ not summed}$$

If i, j, k are different, then $\Gamma^i_{jk} \equiv 0$ We also see that

$$\Gamma^i_{ii} = \frac{1}{2}g^{ii}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i}$$
$$\Gamma^i_{ik} = \frac{1}{2}g^{ii}\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^k} \qquad (590)$$
$$\Gamma^i_{kk} = -\frac{1}{2}g^{ii}\frac{\partial g_{kk}}{\partial x^i}$$

Applying (590), we have

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial r} = \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dr} \\
\Gamma^1_{22} &= -\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{22}}{\partial r} = -re^{-\lambda} \\
\Gamma^1_{33} &= -\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{33}}{\partial r} = -r \sin^2 \theta \, e^{-\lambda} \\
\Gamma^1_{44} &= -\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{44}}{\partial r} = \frac{1}{2} e^{\nu-\lambda} \frac{d\nu}{dr} \\
\Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial r} = \frac{1}{r} \\
\Gamma^2_{33} &= -\frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} = -\sin\theta \cos\theta \\
\Gamma^3_{13} &= \frac{1}{2} g^{33} \frac{\partial g_{33}}{\partial r} = \frac{1}{r} \\
\Gamma^3_{23} &= \frac{1}{2} g^{33} \frac{\partial g_{33}}{\partial \theta} = \cot\theta \\
\Gamma^4_{14} &= \frac{1}{2} g^{44} \frac{\partial g_{44}}{\partial r} = \frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr}
\end{aligned}
\tag{591}
$$

and all other Γ^i_{jk} vanish

From (539)

$$
R_{ij} = \frac{\partial \Gamma^\alpha_{i\alpha}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{ij}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\beta_{i\alpha}\Gamma^\alpha_{\beta j} - \Gamma^\beta_{ij}\Gamma^\alpha_{\beta\alpha}
$$

so that

$$
\begin{aligned}
R_{11} &= \frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial r} + \frac{\partial \Gamma^3_{13}}{\partial r} + \frac{\partial \Gamma^4_{14}}{\partial r} + \Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{21} + \Gamma^3_{13}\Gamma^3_{31} \\
&\qquad + \Gamma^4_{14}\Gamma^4_{41} - \Gamma^1_{11}(\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13} + \Gamma^4_{14}) \\
&= -\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{2}\frac{d^2\nu}{dr^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{d\nu}{dr}\right)^2 - \frac{1}{2r}\frac{d\lambda}{dr} \\
&\qquad - \frac{1}{2r}\frac{d\lambda}{dr} - \frac{1}{4}\frac{d\lambda}{dr}\frac{d\nu}{dr}
\end{aligned}
\tag{592}
$$

by making use of (591) Hence Einstein's law $R_{ij} = 0$ yields

$$
R_{11} = \frac{1}{2}\frac{d^2\nu}{dr^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{d\nu}{dr}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{d\lambda}{dr}\frac{d\nu}{dr} - \frac{1}{r}\frac{d\lambda}{dr} = 0
$$

Similarly

$$
\begin{aligned}
R_{22} &= e^{-\lambda}\left[1 + \frac{1}{2} r \left(\frac{d\nu}{dr} - \frac{d\lambda}{dr}\right)\right] - 1 = 0 \\
R_{33} &= \sin^2 \theta \, e^{-\lambda}\left[1 + \frac{1}{2} r \left(\frac{d\nu}{dr} - \frac{d\lambda}{dr}\right)\right] - \sin^2 \theta = 0 \qquad (593) \\
R_{44} &= e^{\nu-\lambda}\left[-\frac{1}{2}\frac{d^2\nu}{dr^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{d\nu}{dr}\right)^2 + \frac{1}{4}\frac{d\lambda}{dr}\frac{d\nu}{dr} - \frac{1}{r}\frac{d\nu}{dr}\right] = 0
\end{aligned}
$$

Dividing R_{44} by $e^{\nu-\lambda}$ and adding to R_{11}, we obtain

$$\frac{d\lambda}{dr} + \frac{d\nu}{dr} = 0$$

or

$$\lambda + \nu = \text{constant} = c_0$$

We desire the form of (588), as $r \to \infty$, to approach that of (587) This requires that λ and ν approach zero as r approaches ∞. Hence $\lambda + \nu \equiv 0$ or $\lambda = -\nu$ From $R_{22} = 0$ we have $e^{\nu}\left(1 + r\dfrac{d\nu}{dr}\right) = 1.$ Let $\gamma = e^{\nu}$, so that $\dfrac{d\nu}{dr} = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{d\gamma}{dr}$ and

$$\gamma\left(1 + \frac{r}{\gamma}\frac{d\gamma}{dr}\right) = 1$$

or

$$\frac{d\gamma}{1-\gamma} = \frac{dr}{r}$$

and

$$\gamma = 1 - \frac{2m}{r} \qquad (594)$$

where $2m$ is a constant of integration.

The equations of the geodesics are

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0$$

which yield

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + 2\Gamma^2_{12}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds} + \Gamma^2_{33}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0$$

or

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\theta}{ds} - \sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0 \tag{595}$$

If $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{d\theta}{ds} = 0$ initially, then $\theta \equiv \frac{\pi}{2}$ satisfies (595) and the boundary conditions

We also obtain

$$\frac{d^2r}{ds^2} + \Gamma^1_{11}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + \Gamma^1_{33}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \Gamma^1_{44}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0$$

or

$$\frac{d^2r}{ds^2} + \frac{1}{2}\frac{d\lambda}{dr}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - re^{-\lambda}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\frac{d\nu}{dr}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 0 \tag{596}$$

making use of $\theta = \pi/2$

Also

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} + 2\Gamma^3_{13}\frac{dr}{ds}\frac{d\varphi}{ds} = 0 \qquad \text{or} \qquad \frac{d^2\varphi}{ds^2} + \frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\varphi}{ds} = 0 \tag{597}$$

$$\frac{d^2t}{ds^2} + 2\Gamma^4_{14}\frac{dt}{ds}\frac{dr}{ds} = 0 \qquad \text{or} \qquad \frac{d^2t}{ds^2} + \frac{d\nu}{dr}\frac{dt}{ds}\frac{dr}{ds} = 0 \tag{598}$$

Integrating (597) and (598), we obtain

$$r^2\frac{d\varphi}{ds} = h \tag{599}$$

$$\log\frac{dt}{ds} + \nu = \log c \qquad \text{or} \qquad \frac{dt}{ds} = \frac{c}{\gamma} \tag{600}$$

where h and c are constants of integration Equation (588) becomes

$$ds^2 = -\frac{1}{\gamma}dr^2 - r^2\,d\varphi^2 + \gamma\,dt^2$$

or

$$1 = -\frac{1}{\gamma}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \gamma\left(\frac{c}{\gamma}\right)^2$$

or

$$1 = -\frac{1}{\gamma}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r^2\frac{h^2}{r^4} + \gamma\left(\frac{c}{\gamma}\right)^2$$

or

$$\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{h^2}{r^2} = c^2 - 1 + \frac{2m}{r} + \frac{2m}{r}\frac{h^2}{r^2}$$

and writing $u = 1/r$, we obtain

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = \frac{c^2 - 1}{h^2} + \frac{2m}{h^2}u + 2mu^3$$

and differentiating, we finally obtain

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2 \tag{601}$$

We obtain an approximate solution of (601) in the following manner We first neglect the small term $3mu^2 = 3m/r^2$, for large r The solution of $\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{m}{h^2}$ is

$$\frac{1}{r} = u = \frac{m}{h^2}[1 + e\cos(\varphi - \omega)]$$

where e, ω are constants of integration. This is Newton's solution of planetary motion We substitute this value of u in the term $3mu^2$, and we obtain

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{m}{h^2} + \frac{3m^3}{h^4} + \frac{6m^3}{h^4}e\cos(\varphi - \omega) + \frac{3m^3e^3}{2h^4}[1 + \cos 2(\varphi - \omega)]$$

We now neglect certain terms which yield little to our solution and obtain

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{m}{h^2} + \frac{6m^3}{h^4}e\cos(\varphi - \omega)$$

From the theory of differential equations the solution of our new equation is

$$u = \frac{m}{h^2}\left[1 + e\cos(\varphi - \omega) + \frac{3m^2}{h^2}e\varphi\sin(\varphi - \omega)\right]$$

$$= \frac{m}{h^2}[1 + e\cos(\varphi - \omega - \epsilon)], \qquad \text{approximately}$$

where $\epsilon = (3m^2/h^2)\varphi$ and ϵ^2 is neglected.

When the planet moves through one revolution, the advance of the perihelion is given by $\delta(\omega + \epsilon) = (3m^2/h^2)\,\delta\varphi = 6\pi m^2/h^2$ When numerical results are given to the constants, it is found that the discrepancy between observed and calculated results on the advance of the perihelion of Mercury is removed

Problems

1 Derive (591).

2. Derive (593).

3 For motion with the speed of light, $ds = 0$, so that from (599), $h = \infty$, and (601) becomes

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 3mu^2 \tag{602}$$

Integrate $\dfrac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 0$, replace this value of u in $3mu^2$, and obtain an approximate solution of (602) in the form

$$u = \frac{\cos\varphi}{R} + \frac{m}{R^2}(\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi)$$

where R is a constant of integration Since $u = 1/r$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, show that

$$x = R + \frac{m}{R}\frac{x^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

The term $(m/R)(x^2 + 2y^2)/(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ is the small deviation of the path of a light ray from the straight line $x = R$ The asymptotes are found by taking y large compared with x Show that they are $x = R + (m/R)(\pm 2y)$ and that the angle (in radians) between the asymptotic lines is approximately $4m/R$ This is twice the predicted value, on the basis of the Newtonian theory, for the deflection of light as it passes the sun and has been verified during the total eclipse of the sun

4 If $R_{ij} = \alpha g_{ij}$ is taken for the Einstein law, show that if $\gamma = e^{\nu}$, then $\gamma = 1 - (2m/r) - \frac{1}{3}\alpha r^2$ and

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2 - \frac{1}{3}\frac{\alpha}{h^2}u^3$$

5. Assume the following $ds^2 = g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta$, $g_{\alpha\beta} = 0$ for $\alpha \neq \beta$, $g_{\alpha\beta} \approx 1$, $\dfrac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^4} = 0$, $\dfrac{dx^\alpha}{ds} \approx 0$, $\alpha = 1, 2, 3$, $\dfrac{dx^4}{ds} \approx 1$,

$$\frac{\psi}{c^2} = \tfrac{1}{2}g_{44} + \text{constant}$$

$x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z,\ x^4 = ct$ Show that the equations of the geodesics reduce to Newton's law of motion $\dfrac{d^2x^i}{dt^2} + \dfrac{\partial\psi}{\partial x^i} = 0$, $i = 1, 2, 3$

6 With the assumptions of Prob 5 show that $R_{44} = 0$ yields Laplace's equation $\nabla^2\psi = 0$.

142 Two-point Tensors. The tensors that we have studied have been functions of one point Let us now consider the functions $g_{\alpha,\beta}(x_1, x_2)$ which depend on the coordinates of two points We now allow independent coordinate transformations at the two points $M_1(x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n)$, $M_2(x_2^1, x_2^2, x_2^3, \ldots, x_2^n)$ If in the new coordinate systems $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ we have

$$\bar{g}_{\alpha,\beta}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = g_{\mu,\nu}(x_1, x_2)\frac{\partial x_1^\mu}{\partial \bar{x}_1^\alpha}\frac{\partial x_2^\nu}{\partial \bar{x}_2^\beta} \tag{603}$$

then the $g_{\alpha,\beta}$ are the components of a two-point tensor, a covariant vector relative to M_1 and a covariant vector relative to M_2 Indices preceding the comma refer to the point M_1, indices following the comma refer to M_2 If we keep the coordinates of M_2 fixed, that is, if $\bar{x}_2^i \equiv x_2^i$, then (603) reduces to

$$\bar{g}_{\alpha,\beta}(\bar{x}_1, x_2) = g_{\mu,\beta}(x_1, x_2)\frac{\partial x_1^\mu}{\partial \bar{x}_1^\alpha} \tag{604}$$

so that relative to M_1, $g_{\alpha,\beta}$ behaves like a covariant vector A similar remark applies at the point M_2

We leave it to the reader to consider the most general type of two-point tensor fields We could, indeed, consider a multiple tensor field depending on a finite number of points. What difficulties would one encounter for tensors depending on a countable collection of points?

We may consider a two-point tensor field as special one-point tensors of a $2n$-dimensional space subject to a special group of coordinate transformations

The scalar invariant

$$ds^2 = g_{\alpha,\beta}(x_1, x_2)\, dx_1^\alpha\, dx_2^\beta \tag{605}$$

is an immediate generalization of the Riemann line element Indeed, when x_1 and x_2 coincide, we obtain the Riemann line

element. Assuming $ds^2 > 0$ for $\alpha \leqq t \leqq \beta$, we can extremalize

$$\int ds = \int_\alpha^\beta \left(g_{\alpha,\beta} \frac{dx_1^\alpha}{dt} \frac{dx_2^\beta}{dt}\right)^{\frac{1}{2}} dt \tag{606}$$

and obtain a system of differential equations

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1^i + \Gamma^{i,}_{\alpha\beta,} \dot{x}_1^\alpha \dot{x}_1^\beta + C^{i,}_{\alpha,\beta} \dot{x}_1^\alpha \dot{x}_2^\beta &= 0 \\ \ddot{x}_2^i + \Gamma^{,i}_{,\alpha\beta} \dot{x}_2^\alpha \dot{x}_2^\beta + C^{,i}_{\alpha,\beta} \dot{x}_1^\alpha \dot{x}_\beta^2 &= 0 \end{aligned} \tag{607}$$

where

$$\begin{aligned} &\Gamma^{i,}_{\alpha\beta,} = g^{i,\sigma} \frac{\partial g_{\alpha,\sigma}}{\partial x_1^\beta}, \qquad \Gamma^{,i}_{,\alpha\beta} = g^{\sigma,i} \frac{\partial g_{\sigma,\beta}}{\partial x_2^\alpha} \\ &C^{i,}_{\sigma,\nu} = g^{i\,\beta}\left(\frac{\partial g_{\sigma,\beta}}{\partial x_2^\nu} - \frac{\partial g_{\sigma,\nu}}{\partial x_2^\beta}\right), \qquad C^{,i}_{\sigma,\nu} = g^{\mu,i}\left(\frac{\partial g_{\mu,\nu}}{\partial x_1^\sigma} - \frac{\partial g_{\sigma,\nu}}{\partial x_1^\mu}\right) \\ &g^{\mu,i} g_{\mu,j} = \delta^{,i}_{,j}, \qquad \dot{x}_1 = \frac{dx_1^i}{ds} \end{aligned} \tag{608}$$

The unique solutions of (606), $x_1^i(s)$, $x_2^i(s)$, subject to the initial conditions $x_1^i(s_0) = \alpha_0^i, x_2^i(s_0) = \beta_0^i, \dot{x}_1^i(s_0) = \alpha_1^i, \dot{x}_2^i(s_0) = \beta_1^i$, are called dyodesics, or dyopaths.

Problems

1 Derive (607)

2 Show that the $C^{,i}_{\alpha,\beta}(x_1, x_2)$ are the components of a two-point tensor, a mixed tensor relative to M_1, and a covariant vector relative to M_2.

3. Show that the law of transformation for the linear connection $\Gamma^{i,}_{\alpha\beta,}$ is

$$\bar{\Gamma}^{i}_{\alpha\beta,}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \Gamma^{\mu,}_{\sigma\tau,}(x_1, x_2) \frac{\partial x_1^\sigma}{\partial \bar{x}_1^\alpha} \frac{\partial x_1^\tau}{\partial \bar{x}_1^\beta} \frac{\partial \bar{x}_1^i}{\partial x_1^\mu} + \frac{\partial^2 x_1^\mu}{\partial \bar{x}_1^\alpha \partial \bar{x}_1^\beta} \frac{\partial \bar{x}_1^i}{\partial x_1^\mu}$$

4 Show that $\Gamma^{i,}_{\alpha\beta,} = \Gamma^{i,}_{\beta\alpha,}$ if and only if $g_{\alpha,\beta} = \dfrac{\partial \varphi_{,\beta}}{\partial x_1^\alpha}$, where $\varphi_{,\beta}(x_1, x_2)$ is a scalar relative to M_1 and a covariant vector relative to M_2 If also $\Gamma^{,i}_{,\alpha\beta} = \Gamma^{,i}_{,\beta\alpha}$, show that of necessity

$$g_{\alpha,\beta} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^\alpha \partial x_2^\beta}$$

where ψ is a scalar relative to both M_1 and M_2.

5 If

$$ds^2 = -e^{\lambda}\, dr_1\, dr_2 - r_1 r_2 e^{\mu}\, d\varphi_1\, d\varphi_2 + e^{\nu}\, dt_1\, dt_2$$

$$e^{\nu} = \left[1 - \frac{mM^2}{(m+M)^2}\frac{1}{r_1}\right]\left[1 - \frac{m^2 M}{(m+M)^2}\frac{1}{r_2}\right]$$

$$e^{\mu} = \left(1 + \frac{M}{r_1}\right)\left(1 + \frac{m}{r_2}\right)$$

$$e^{\lambda} = e^{2\mu-\nu}$$

show that the two-point tensors

$$T_{\alpha,\beta} = \frac{\partial C^{\sigma,}_{\alpha,\beta}}{\partial x_1^{\sigma}} - \frac{\partial \Gamma^{\sigma,}_{\alpha\sigma,}}{\partial x_2^{\beta}} + \Gamma^{\sigma,}_{\tau\sigma,} C^{\tau,}_{\alpha,\beta} - C^{\sigma,}_{\tau,\beta}\Gamma^{\tau,}_{\alpha\sigma,}$$

$$T'_{\alpha,\beta} = \frac{\partial \Gamma^{,\sigma}_{,\beta\sigma}}{\partial x_1^{\alpha}} - \frac{\partial C^{,\sigma}_{\alpha,\beta}}{\partial x_2^{\sigma}} + C^{,\sigma}_{\alpha,\tau}\Gamma^{,\tau}_{,\beta\sigma} - C^{,\tau}_{\alpha,\tau}\Gamma^{,\sigma}_{,\beta\sigma}$$

vanish identically (m, M are constants) Show that the dyodesics satisfy

$$r_1 r_2 \frac{d\varphi_1}{ds} = he^{-\mu}$$

$$r_1 r_2 \frac{d\varphi_2}{ds} = he^{-\mu}$$

$$\frac{dt_1}{ds} = C_1 e^{-\nu}$$

$$\frac{dt_2}{ds} = C_2 e^{-\nu}$$

$$\frac{d^2 v}{d\varphi_1^2} + v\left[1 + \frac{Mm}{[1+(m/M)]^4 h_1^2}\right] \approx \frac{M}{[1+(m/M)]^2 h_1^2} + 3Mv^2\left[1 + \frac{Mm}{(m+M)^2}\right]$$

provided that $Mr_2 \equiv mr_1$, $v = 1/r_1$, $h_1 = (M/m)h$ For $m \ll M$, $Mm/h_1^2 \ll 1$, we have $\dfrac{d^2 v}{d\varphi_1^2} + v \approx \dfrac{M}{h_1^2} + 3Mv^2$, the Einstein solution for the motion of an infinitesimal particle moving in the field of a point gravitational mass M

REFERENCES

Brand, L "Vectorial Mechanics," John Wiley & Sons, Inc, New York 1930

Brillouin, L "Les Tenseurs," Dover Publications, New York 1946

Graustein, W. C. "Differential Geometry," The Macmillan Company, New York 1935.

Houston, W V "Principles of Mathematical Physics," McGraw-Hill Book Company, New York 1934.

Joos, G "Theoretical Physics," G E Stechert & Company, New York 1934

Kellogg, O D "Foundations of Potential Theory," John Murray, London 1929

McConnell, A J "Applications of the Absolute Differential Calculus," Blackie & Son Ltd, Glasgow. 1931

Michal, A D "Matrix and Tensor Calculus," John Wiley & Sons, Inc, New York. 1947

Milne-Thomson, L M. "Theoretical Hydrodynamics," The Macmillan Company, New York 1938

Page, L "Introduction to Theoretical Physics," D Van Nostrand Company, New York 1935.

Phillips, H B "Vector Analysis," John Wiley & Sons, Inc, New York 1933

Smythe, W. R. "Static and Dynamic Electricity," McGraw-Hill Book Company, New York 1939

Thomas, T Y. "Differential Invariants of Generalized Spaces," Cambridge University Press, London 1934

Tolman, R C "Relativity Thermodynamics and Cosmology," Oxford University Press, New York 1934

Veblen, O. "Invariants of Quadratic Differential Forms," Cambridge University Press, London. 1933

Weatherburn, C E "Elementary Vector Analysis," George Bell & Sons, Ltd, London 1921

——— "Advanced Vector Analysis," George Bell & Sons, Ltd., London, 1944.

——— "Differential Geometry," Cambridge University Press, London 1927

——— "Riemannian Geometry," Cambridge University Press, London 1942

Wilson, W "Theoretical Physics," vols I, II, III, Methuen & Co., Ltd, London 1931, 1933, 1940.

INDEX